Московский ордена Трудового Красного Знамени
физико-технический институт

А.М.Молчанов

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЛЕКЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ
II КУРСА

Москва 1971 г.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Р С Ф С Р

Московский физико-технический институт

Утверждено в качестве
учебного пособия кафедрой
высшей математики

А.М. Молчанов

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекции для студентов 2 курса

Москва, 1970 г.

ВВЕДЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

п^{0}I Векторное пространство

Множество элементов (векторов) называется векторным пространством, если в этом множестве определены две операции:

Сложение векторов,

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{z} \qquad (I.1)$$

и умножение векторов на число,

$$\lambda \bar{x} = \bar{z} \qquad (I.2)$$

Эти операции обладают следующими свойствами:

Сочетательность (ассоциативность) сложения

$$(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) \qquad (I.3)$$

Перестановочность (коммутативность) сложения

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x} \qquad (I.4)$$

Существование нулевого вектора

$$\bar{x} + \bar{0} = \bar{x} \qquad (I.5)$$

Ассоциативность умножения на число

$$\lambda (\mu \bar{x}) = (\mu \lambda) \bar{x} \qquad (I.6)$$

Распределительность (дистрибутивность) двух видов:

$$\lambda (\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y} \qquad (I.7)$$

$$(\lambda + \mu) \bar{x} = \lambda \bar{x} + \mu \bar{x} \qquad (I.8)$$

Пространство называется n-мерным, если существует ровно n векторов (базис) $e_1, e_2, \ldots, e_n$, через которые однозначно выражается любой вектор из x_n

$$\bar{x} = x^1 \bar{e}_1 + \dots + x^n \bar{e}_n = x^\alpha \bar{e}_\alpha \qquad (I,9)$$

Различают два типа векторных пространств, комплексные если задано умножение на комплексные числа и действительные, если можно умножить только на действительные числа. Каждое комплексное пространство изоморфно действительному пространству вдвое большей размерности.

Задача I

Доказать, что множество троек (столбцов) комплексных чисел X_3

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad (I.10)$$

образуют трехмерное комплексное векторное пространство, если сложение и умножение определены покомпонентно:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ x^3 + y^3 \end{pmatrix} \qquad (I.11)$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \lambda x^2 \\ \lambda x^3 \end{pmatrix} \qquad (I.12)$$

Построить базис в этом пространстве

Задача 2.

В пространстве X_3 предыдущего примера рассмотреть умножение только на действительные числа. Построить базис получающегося шестимерного действительного пространства R_6. Показать, что в базис действительного пространства обязательно войдут столбцы с комплексными элементами.

п^{0}2 Норма в векторном пространстве

Действительная числовая функция $f(\bar{x})$ векторного аргумента $\bar{x}$, определенная на всем пространстве X называется нормой, если она обладает тремя свойствами:

I. Положительность (дефинитность)

$f(\bar{x})>0$ из $f(\bar{x})=0$ вытекает, что $\bar{x}=0$ (2.I)

2. Однородность

$$f(\lambda\bar{x}) = |\lambda| f(\bar{x}) \tag{2.2}$$

3. Выпуклость ("неравенство треугольника")

$$f(\bar{x}+\bar{y}) \leq f(\bar{x}) + f(\bar{y}) \tag{2.3}$$

Норму обычно обозначают также, как абсолютную величину чисел -вертикальными черточками

$$f(\bar{x}) = |\bar{x}| \tag{2.4}$$

Геометрический критерий

Положительная однородная функция $f(\bar{x})$ является нормой тогда и только тогда, когда единичная сфера

$$f(\bar{x}) = |\bar{x}| = 1 \tag{2.5}$$

ограничивает выпуклое тело.

В пространстве R_n столбцов

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

из n комплексных чисел (с покомплексным сложением и умножением на комплексные числа) наиболее употребительны нормы l_p :

$$f_p(\bar{x}) = \left(|x^1|^p + \dots + |x^n|^p\right)^{1/p} \tag{2.7}$$

Задача 3

Показать, что выпуклость имеет место при $p \geq 1$

$$f_p(\bar{x} + \bar{y}) \leq f_p(\bar{x}) + f_p(\bar{y}) \tag{2.8}$$

а при $p < 1$ выпуклости нет.

Задача 4

Показать, что функция $f(\bar{x})$

$$f(\bar{x}) = \max_{1 \leq \alpha \leq n} |x^\alpha| \tag{2.9}$$

является нормой в R_n.

Задача 5

Показать, что норма из предыдущей задачи является пределом норм ℓ_p

$$f(\bar{x}) = f_\infty(\bar{x}) = \lim_{p \to +\infty} f_p(\bar{x}) \tag{2.10}$$

п°3 Линейные функции. Прямоугольные матрицы

Функция $A(\bar{x})$, заданная на векторном нормированном пространстве X и принимающая значения $\bar{y}$

$$\bar{y} = A(\bar{x}) \tag{3.1}$$

из другого (в частности того же) нормированного векторного пространства Y называется линейной, если выполнены три условия:

1. Мультипликативность (однородность)

$$A(\lambda\bar{x}) = \lambda A(\bar{x}) \tag{3.2}$$

2. Аддитивность

$$A(\bar{x}' + \bar{x}'') = A(\bar{x}') + A(\bar{x}'') \tag{3.3}$$

3. Ограниченность

$$|A| = \sup_{|\bar{x}| \leq 1} |A(\bar{x})| < +\infty \tag{3.4}$$

Число $|A|$ называется нормой линейной функции $A(\bar{x})$. Аргумент $\bar{x}$ линейной функции принято записывать без скобок в виде множителя справа от символа функции

$$\bar{y} = A\bar{x} \tag{3.5}$$

Задача 6

Доказать, что в действительном пространстве мультипликативность вытекает из аддитивности и ограниченности.

Задача 7

В комплексном пространстве построить пример ограниченной и аддитивной, но не мультипликативной функции. Найти общий вид аддитивных, ограниченных функций.

Линейная функция $A\bar{x}$ переводит векторы базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ пространства X в некоторые векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ пространства Y

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_1 &= A\bar{e}_1 \\ \bar{a}_2 &= A\bar{e}_2 \\ &\dots \\ \bar{a}_n &= A\bar{e}_n \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Эти векторы можно разложить по базису $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m$ пространства Y

$$\left.\begin{aligned} A\bar{e}_1 &= A_1^1\bar{g}_1 + A_1^2\bar{g}_2 + \dots + A_1^m\bar{g}_m \\ A\bar{e}_2 &= A_2^1\bar{g}_1 + A_2^2\bar{g}_2 + \dots + A_2^m\bar{g}_m \\ &\dots \\ A\bar{e}_n &= A_n^1\bar{g}_1 + A_n^2\bar{g}_2 + \dots + A_n^m\bar{g}_m \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Задание линейной функции равносильно заданию прямоугольной матрицы коэффициентов, так как результат применения функции A к любому вектору $\bar{x}$ может быть вычислен на основании свойств аддитивности и мультипликативности, как только нам известны числа A^{α}_{β}

$$\left.\begin{aligned} y^1 &= A^1_1 x^1 + A^1_2 x^2 + \dots + A^1_n x^n \\ y^2 &= A^2_1 x^1 + A^2_2 x^2 + \dots + A^2_n x^n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^m &= A^m_1 x^1 + A^m_2 x^2 + \dots + A^m_n x^n \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

Эти „m" покомпонентных равенств можно истолковать, как одно матричное равенство (для определенности принято, что $n > m$):

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_m & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_m & \dots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^m_1 & A^m_2 & \dots & A^m_m & \dots & A^m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \qquad (3.9)$$

если ввести обычное соглашение о перемножения прямоугольных матриц,

$$C = AB \qquad (3.10)$$

по правилу "элемент", стоящии на пересечении i -ои строки и k -ого столбца в произведении C есть сумма полярных произведений элементов i -ой строки левого множителя A на элементы k -ого столбца правого множителя B":

$$C^i_k = A^i_{\alpha} B^{\alpha}_k = A^i_1 B^1_k + A^i_2 B^2_k + \dots + A^i_l B^l_k \qquad (3.11)$$

где l - число столбцов левого множителя, совпадающее (иначе произведение не определено) с числом строк правого множителя.

Сложение линейных функций

Две линейные функции, A и B,

$$\bar{u} = A\bar{x}\ ; \qquad \bar{V} = B\bar{x}, \tag{3.12}$$

действующие обе из X в Y, порождают линейную функцию C, сумму A и B

$$\bar{W} = C\bar{x} = \bar{u} + \bar{V} \tag{3.13}$$

также действующую из X в Y.

Матрица суммы равна сумме матриц:

$$C_k^i = A_k^i + B_k^i \tag{3.14}$$

Суперпозиция (наложение, произведение) линейных функций

Линейная функция A,

$$\bar{y} = A\bar{x} \tag{3.15}$$

действующая из X в Y, вместе с линейной функцией B,

$$\bar{z} = B\bar{y}, \tag{3.16}$$

действующей из Y в Z, порождают линейную функцию C,

$$\bar{z} = C\bar{x}, \tag{3.17}$$

действующую из X в Z.

Матрица линейной функции C есть произведение матриц линейных функций A и B,

$$C = BA, \tag{3.18}$$

причем матрица A стоит справа, а матрица B- слева:

(3.19)

п^{о}4 Линейные операторы. Квадратные матрицы. Форма Жордана

Линейные функции, действующие из X в X, называются линейными операторами. Соответствующие матрицы являются квадратичными. Для линейных операторов определено как сложение, так и умножение. В частности, умножение векторов на заданное число λ есть линейный оператор с матрицей, пропорциональной единичной.

Большое значение имеет понятие собственного вектора $\bar{x}$,

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \tag{4.I}$$

действие на который линейного оператора A сводится к умножению на число λ. Это число называется собственным или характеристическим числом оператора A.

Определение собственного вектора можно записать иначе:

$$(A - \lambda E)\bar{x} = 0 \tag{4.2}$$

откуда видно, что все собственные числа являются корнями характеристического (секулярного, векового) многочлена

$$P(\lambda) = \det\|A - \lambda E\| = 0 \tag{4.3}$$

Кроме собственных векторов, оператор может иметь еще присоединенные векторы, удовлетворяющие уравнениям вида

$$(A - \lambda E)^{k+1}\bar{x} = 0 \tag{4.4}$$

каждый такой вектор порождает инвариантное подпространство, натянутое на цепочку векторов,

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_{\kappa} &= \bar{x} \\
\bar{x}_{\kappa-1} &= (A - \lambda E)\,\bar{x} \\
&\ldots\ldots \\
\bar{x}_{0} &= (A - \lambda E)^{\kappa}\,\bar{x}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

последний из которых, $\bar{x}_0$, является собственным вектором оператора A , а остальные присоединены к нему

$$
\begin{aligned}
A\bar{x}_{\kappa} &= \lambda \bar{x}_{\kappa} + \bar{x}_{\kappa-1} \\
A\bar{x}_{\kappa-1} &= \lambda \bar{x}_{\kappa-1} + \bar{x}_{\kappa-2} \\
&\ldots\ldots \\
A\bar{x}_{1} &= \lambda \bar{x}_{1} + \bar{x}_{0} \\
A\bar{x}_{0} &= \lambda \bar{x}_{0}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Матрица оператора A , рассматриваемого только на подпространстве линейных комбинаций векторов $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$ имеет вид, называемой жордановой клеткой

$$
\begin{Vmatrix}
\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \ldots & \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda
\end{Vmatrix}
\tag{4.7}
$$

<u>Теорема Жордана</u>

Произвольный оператор A в комплексном конечномерном пространстве приводится к жордановой форме, состоящей из конечного числа жордановых клеток:

$$
A = \begin{Vmatrix}
J_1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & J_2 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & J_{\kappa}
\end{Vmatrix}
\tag{4.8}
$$

здесь применен так называемый "расщепленный" способ записи матриц, когда каждый символ означает матрицу меньшей размерности. В частности, $\mathcal{J}_1$ –жорданова клетка размерности $к_1$, соответствующая собственному значению λ_1 и т.д. Нули обозначают прямоугольные матрицы, состоящие из нулевых элементов. В частности, нуль на втором месте в первой строке– это матрица из нулей, имеющая $к_1$ строк (столько, сколько строк в $\mathcal{J}_1$) и $к_2$ столбцов (столько, сколько столбцов в $\mathcal{J}_2$).Нуль на первом месте второй строки заменяет матрицу из $к_2$ строк и $к_1$ столбцов.

п^{0}5. Дифференцируемые функции. Правила дифференцирования

Пусть аргумент $\bar{x}$ вектор - функции $\bar{y}$

$$\bar{y} = f(\bar{x}) \tag{5.1}$$

принадлежит пространству X, а значение У пространству $\mathcal{Y}$.В естествознании важную роль играют функции, имеющие тенденцию становиться линейными " в малом". Идеализация этой общей закономерности приводит к понятию дифференциала.

Определение

Дифференциалом называется главная линейная часть приращения функции.

Точно это означает возможность представления приращения функции

$$\Delta \bar{y} = f(\bar{x} + \Delta \bar{x}) - f(\bar{x}) \tag{5.2}$$

в виде суммы двух функций,

$$\Delta \bar{y} = A \Delta \bar{x} + o(\Delta \bar{x}), \tag{5.3}$$

одна из которых (это и есть дифференциал) линейна относительно приращения,

$$d\bar{y} = A \Delta \bar{x}, \tag{5.4}$$

а вторая мала по сравнению с $\Delta \bar{x}$,

$$\frac{|o(\Delta \bar{x})|}{|\Delta \bar{x}|} \xrightarrow[\Delta \bar{x} \to 0]{} 0 \tag{5.5}$$

Существенны два обстоятельства.

Во-первых, приращение, дифференциал и величина " о малое" является функциями двух независимых переменных - "точки приложения" $\bar{x}$ и приращения аргумента $\Delta \bar{x}$. Однако,свойства линейности и малости формулируются только по отношению ко второму переменному (приращению), первое предполагается фиксированным, в знак чего его нередко обозначают через $\bar{x}_0$.

Во-вторых символ нормы в соотношении (5.5) имеет разный смысл в числителе и знаменателе. В знаменателе-это норма в пространстве X, а в числителе-это норма в пространстве Y. Но так как и то и другое положительные действительные числа, то их отношение имеет смысл. Дробь же без символов нормы смысла не имеет, ибо операция деления векторов в общем виде не определена. Тем не менее,понятие производной имеет смысл и для векторных функций векторного аргумента. Отличие от скалярного аргумента заключается в том, что из двух определений (предел разностного отношения и коэффициент в дифференциале) сохраняет смысл для векторного случая только второе.

Определение

Производной векторной функции $\bar{y}$ векторного аргумента $\bar{x}$ называется прямоугольная матрица A в форме дифференциала (5.4). Смысл рассмотрения наряду с дифференциалом также и производной

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = A \tag{5.6}$$

состоит в том, что производная - это функция только одного независимого вектора $\bar{x}$, в то время как дифференциал является функцией двух независимых переменных ($\bar{x}$ и $\Delta\bar{x}$).

Пример:

$$\frac{d\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}}{d\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x_1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \end{pmatrix}$$

Производная суммы

Пусть даны две функции

$$\bar{u} = \bar{u}(\bar{x})$$
$$\bar{V} = \bar{V}(\bar{x}) \quad ,$$

заданные в одном и том же пространстве X и принимающие значения в другом (одинаковом для обеих функций) пространстве Y. Определим сумму функций $\bar{W}$ формулой

$$\bar{W} = \bar{u}(\bar{x}) + \bar{V}(\bar{x}) \tag{5.8}$$

Если обе функции дифференцируемы в точке $\bar{x}$, то сумма также дифференцируется в этой точке и ее производная равна сумме производных

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} + \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} \tag{5.9}$$

Производная сложной функции

Пусть функция f

$$\bar{y} = f(x) \tag{5.I0}$$

задана из пространства X и принимает значения из пространства Y , а функция g

$$\bar{z} = g(\bar{y}) \tag{5.II}$$

задана из пространства Y и принимает значения из пространства Z .Определим сложную функцию

$$\bar{\bar{z}} = h(\bar{x}) \tag{5.I2}$$

на пространстве X со значениями из Z или суперпозицию функций f и g

$$h(\bar{x}) = g\big(f(\bar{x})\big) \tag{5.I3}$$

Если $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x}_0$, а $g(\bar{y})$ дифференцируема в точке $\bar{y}_0$, являющейся образом точки $\bar{x}_0$

$$\bar{y}_0 = f(\bar{x}_0) \tag{5.I4}$$

то сложная функция $h(\bar{x})$, дифференцируемая в точке x_0, и ее производная равна произведению производных функций f и g:

$$\frac{dh}{d\bar{x}} = \frac{dg}{d\bar{y}} \cdot \frac{df}{d\bar{x}} \qquad (5.15)$$

Удобная для заполнения форма этого утверждения имеет вид:

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} = \frac{dg}{d\bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \qquad (5.16)$$

Следствие

Если пространства X и Y совпадают, то производные являются квадратичными матрицами и на основании теоремы об определителе произведения матриц имеем:

$$\det \frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} = \det \frac{d\bar{z}}{d\bar{y}} \det \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \qquad (5.17)$$

Частный случай этой формулы для матриц второго порядка весьма популярен при термодинамических выкладках ("матриц якобианов")

Задача 8

Найти связь между теплоемкостью при постоянном объеме и теплоемкостью при постоянном давлении "методом якобианов".

п°6 Формула Ньютона- Лейбница. Лемма Адамара

Для векторных функций скалярного аргумента

$$\bar{y} = \bar{y}(t) \tag{6.1}$$

имеет место классическая формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\bar{y}}{dt}\, dt = \bar{y}(t_2) - \bar{y}(t_1) \tag{6.2}$$

Если аргумент функции $\bar{y}$ также вектор, то понятие интеграла допускает различные обобщения (криволинейный, поверхностный, объемный интегралы). Каждому обобщению понятия интеграла соответствует обобщение формулы Ньютона-Лейбница.

В частности, понятие криволинейного интеграла приводит к лемме Адамара.

Лемма Адамара

Пусть

$$\bar{y} = \bar{y}(x) \quad - \tag{6.3}$$

векторная функция векторного аргумента $\bar{x}$, имеющая непрерывную производную

$$A(\bar{x}) = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \tag{6.4}$$

в каждой точке прямой

$$\bar{x}(t) = (1-t)\bar{x}' + t\,\bar{x}'', \tag{6.5}$$

соединяющей точки $\bar{x}'$ и $\bar{x}''$. Тогда имеет место аналог формулы конечных приращений Лагранжа:

$$\bar{y}(\bar{x}'') - \bar{y}(\bar{x}') = A(\bar{x}'' - \bar{x}'), \qquad (6.6)$$

где матрица A есть среднее значение производной на отрезке $(\bar{x}'', \bar{x}')$

$$A = \int_0^1 A(\bar{x}(t))\,dt \qquad (6.7)$$

Доказательство состоит в вычислении производной

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} = A(\bar{x}(t))(\bar{x}'' - \bar{x}') \qquad (6.8)$$

по правилу дифференцирования сложной функции и подстановке полученного выражения в формулу Ньютона-Лейбница (6.2).

Основное отличие леммы Адамара от теоремы Лагранжа (векторного случая от скалярного) состоит в том, что среднее значение (6.7) не совпадает, вообще говоря, со значением ни в одной промежуточной точке,.

Задача 9

построить пример функции $\bar{y}(t)$, производная которой отлична от нуля во всех точках, а среднее значение производной равно нулю. Указание: рассмотреть периодическую функцию.

п^{0}7 Теорема о неявной функции

пусть

$$\bar{z} = \bar{\mathcal{F}}(\bar{x}, \bar{y}) \qquad (7.1)$$

функция двух векторных переменных, обращающаяся в нуль в точке $\bar{x}_0, \bar{y}_0$

$$0 = \mathcal{F}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \qquad (7.2)$$

и непрерывно дифференцируема

$$\frac{d\bar{z}}{d\binom{\bar{x}}{\bar{y}}} = \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}}, \frac{d\bar{z}}{d\bar{y}} \right) \qquad (7.3)$$

в окрестности этой точки.

Если в точке (x_0, y_0) определитель $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}}$ отличен от нуля,

$$\det \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{y}} \right)_{x_0 y_0} \neq 0 , \qquad (7.4)$$

что, в частности, означает одинаковую размерность пространств Y и Z, то существует функция

$$\bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) \qquad (7.5)$$

обращающая уравнение

$$\mathcal{F}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \qquad (7.6)$$

в тождество.

Функция $f(\bar{x})$ дифференцируемая и ее производная вычисляется из равенства

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{d\bar{x}} + \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = 0 \qquad (7.7)$$

возникающего из (7.6) при дифференцировании этого равенства по правилу дифференцирования сложной функции. Следовательно

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = -\left(\frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial \bar{y}} \right)^{-1} \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial \bar{x}} \qquad (7.8)$$

ГЛАВА I ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

п°8. Нормальные системы

Система уравнений,

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= a^1(x^1, x^2, \dots, x^n; t) \\ \frac{dx^2}{dt} &= a^2(x^1, x^2, \dots, x^n; t) \\ &\dots\dots \\ \frac{dx^n}{dt} &= a^n(x^1, x^2, \dots, x^n; t) \end{aligned} \tag{8.1}$$

называется нормальной системой первого порядка и является основным предметом изучения в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Такие системы называют также системами Коши-Ковалевской[ж)] или системами, разрешенными относительно производных. Правые части $a^n(x^1, x^2, \dots x^n; t)$ предполагаются непрерывными функциями совокупности своих аргументов.

Удобна векторная запись

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{a}(\bar{x}, t) \tag{8.2}$$

показывающая, что система уравнений для координат x^n вектора $\bar{x}$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

[ж)] По имени математиков, много сделавших для понимания свойств уравнений с аналитическими правыми частями.

равносильна одному векторному уравнению. Правая часть векторного уравнения,

$$\bar{a}(\bar{X},t) = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

есть вектор-функция вектора $\bar{X}$ и скаляра t.

Для того, чтобы какое-нибудь равенство между функциями вообще могло иметь смысл, нужно, чтобы в обеих частях равенства стояли функции одного и того же аргумента. Поэтому уравнение (8.2) следует рассматривать как сокращенную форму записи более полного уравнения

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{a}(\bar{X}(t),t) \tag{8.5}$$

Полная форма уравнения подсказывает и точное определение решения.

Решением уравнения (8.2) называется векторная функция

$$\bar{X} = \bar{X}(t) \tag{8.6}$$

скалярного аргумента t, заданная на некотором интервале и обращающая уравнение в тождество на всем интервале определения функции $\bar{X}(t)$.

Кинематическое истолкование

Дифференциальные уравнения возникают при решении самых разнообразных задач естествознания. Поэтому переменные X и t могут иметь очень разный смысл. При изучении, например, проточного химического реактора, X^1 - концентрация одного из соединений t - расстояние от входа в реактор, X^2 - температура смеси и т.д.

Однако помнить физический смысл переменных нужно только во время вывода уравнений. После того, как уравнения получены (предполагается, что они написаны правильно) удобно любой системе придать стандартное истолкование. Т.к. исторически важную роль играли геометрические (и баллистические задачи), то издавна принято каждой системе уравнений сопоставлять кинематическую задачу о движении точки в пространстве . При таком истолковании правая часть уравнения (8.2) приобретает стандартный смысл поля скоростей, а задача интегрирования уравнения сводится к стандартной задаче отыскания траектории по известной мгновенной скорости движения $\bar{a}(\bar{X},t)$.

Геометрическое изображение

Наиболее полно изображение траектории $\bar{X}(t)$ - это кривая в пространстве $\bar{X},t$.Однако это изображение довольно громоздко и на практике часто ограничиваются проекцией на пространство только $\bar{X}$

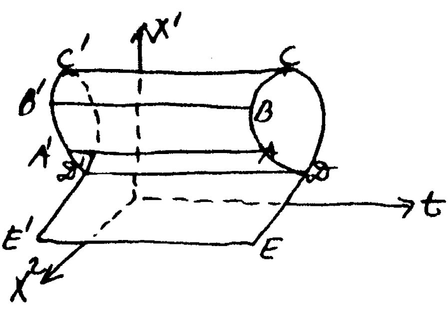


Рис.I

Векторное поле $\bar{a}(\bar{X},t)$ изображают векторами $\bar{a}$, приложенными к точке $\bar{X},t$. Существенно подчеркнуть два обстоятельства. Во-первых все векторы параллельны пространству $\bar{X}$ (на рисунке плоскости X^1, X^2). Во-вторых вектор $\bar{a}$ дает скорость движения точки $\bar{X}$, а не точки $\bar{X},t$. Поэтому вектор $\bar{a}$ будет касательным к проекции кривой $(\bar{X}(t),t)$ на пространстве $\bar{X}$ а не к самой кривой в $n+1$ -мерном пространстве.

Автономные системы

Важный частный случай составляют автономные системы,

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{a}(\bar{X}) \qquad (8.6)$$

правые части которых не зависят от времени t.

Для автономных систем задача интегрирования допускает наиболее наглядное истолкование

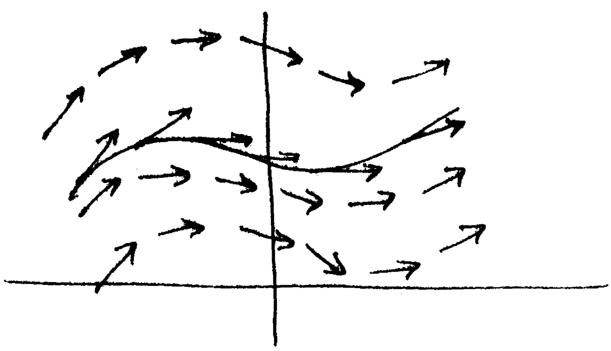


Рис.2. Векторное поле и траектории для автономных систем.

Векторное поле скоростей можно изображать прямо в пространстве $\bar{X}$, т.к. скорость $\bar{a}(\bar{X})$ зависит только от положения $\bar{X}$ и не зависит от времени. Задача, поэтому, состоит в проведении кривой $\bar{X}(t)$, которая в каждой точке $\bar{X}$ касается вектора $\bar{a}(\bar{X})$ отложенного из этой точки $\bar{X}$.

п°9. Ломаные Эйлера Теорема Эйлера

Эйлеру принадлежит простой приближенный метод отыскания решений уравнения (8.2). Он основан прямо на определении производной функции скалярного аргумента:

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{X}}{\Delta t} \tag{9.1}$$

Поэтому уравнение (8.2) приближенно можно записать в виде:

$$\frac{\Delta \bar{X}}{\Delta t} \approx \bar{a}(\bar{X}_0, t_0) \tag{9.2}$$

Определим теперь точку $\bar{X}_1$ по формуле:

$$\bar{X}_1 = \bar{X}_0 + \bar{a}_0 \Delta t \tag{9.3}$$

где символом $\bar{a}_0$ обозначена мгновенная скорость в точке $\bar{X}_0$ в момент времени t_0

$$\bar{a}_0 = \bar{a}(\bar{X}_0, t_0) \tag{9.4}$$

аналогично строим точку $\bar{X}_2$

$$\bar{X}_2 = \bar{X}_1 + \bar{a}_1 \Delta t_1 \tag{9.5}$$

очевидное по индукции обобщение:

$$\bar{X}_{k+1} = \bar{X}_k + \bar{a}_k \Delta t_k \tag{9.6}$$

позволяет построить ломаную Эйлера, соответствующую разбиению на "n" частей

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots < t_n = T \tag{9.7}$$

отрезка $t_0 \le t \le T$ изменения независимой переменной

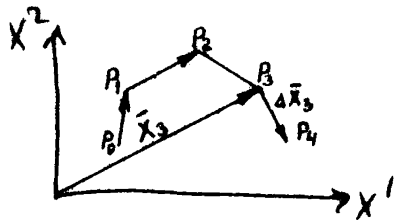


Рис.3. Ломаная Эйлера на плоскости, $n=4$

Кинематический смысл формулы (9.6) очевиден. Средней скорости движения в промежутке времени Δt_k мы не знаем, но зато знаем мгновенную скорость $\bar{a}_k$. Если $\bar{a}$ непрерывна, то на малом отрезке Δt_k скорости будут мало различаться и следующие можно вычислить по мгновенной скорости в любой момент времени.

Значение $\bar{X}$ в конце интервала (t_0, T) можно записать, согласно (9.6) в виде

$$\bar{X}_n = \bar{X}_0 + \sum_{k=0}^{k=n-1} \bar{a}(\bar{x}_k, t_k)\Delta t_k \tag{9.8}$$

который показывает, что ломаная Эйлера является обобщением понятия интегральной суммы для определенного интеграла, а если $\bar{a}$

не зависит от $\bar{X}$, то эти понятия просто совпадают.

Естественно, поэтому, по аналогии с интегральной суммой попытаться совершить предельный переход при $\Delta t \to 0$, где

$$\Delta t = \max_{k} \Delta t_k \qquad (9.9)$$

Однако зависимость функции $\bar{a}$ от искомого решения $\bar{X}$ может приводить к существенному различию свойств ломаных Эйлера и интегральных сумм. Предел ломаных Эйлера при $\Delta t \to 0$ может не существовать. Это происходит потому, что решение не всегда единственно и часть последовательности сходится к одному решению, часть к другому, а вся последовательность не имеет предела. Пример такой ситуации приведен ниже, в сл.параграфе.

Указанное обстоятельство делает доказательство теоремы Эйлера довольно сложным и выходящим за рамки курса. Ограничимся,поэтому, формулировкой теоремы.

<u>Теорема Эйлера</u>

Пусть $a(\bar{x},t)$ - непрерывная функция $\bar{x}, t$.
Рассмотрим последовательность ломаных Эйлера (начинающихся при $t=t_0$ в заданной точке $\bar{X}=\bar{X}_0$), для которой $\Delta t \to 0$.
Из любой такой последовательности можно выбрать сходящуюся (на некотором, достаточно малом интервале $(t_0 \leq t \leq T)$) подпоследовательность, предел которой

$$\bar{X} = \bar{X}(t) \qquad (9.10)$$

непрерывно дифференцируемая функция t , удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{a}(\bar{x},t) \qquad (9.11)$$

проходящая через заданную точку

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \qquad (9.12)$$

п° 10. Пример неединственности

Уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3} \qquad (10.1)$$

кроме однопараметрического семейства решений

$$x = (t-c)^3 \qquad (10.2)$$

имеет еще особое решение

$$x(t) = 0 \qquad (10.3)$$

касающееся всех решений семейства. Это особое решение - геометрические место точек перегиба кривых семейства (10.2)

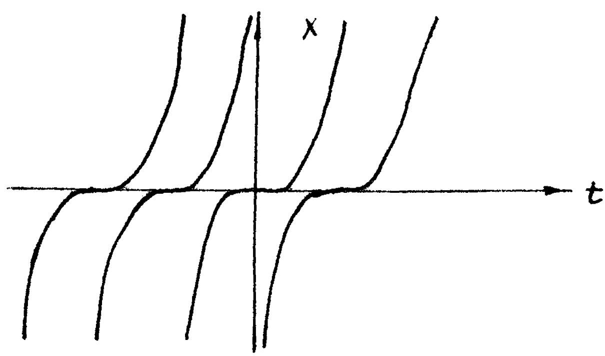


Рис. 4 Семейство решений и огибающая семейства

Ломаные Эйлера для этого уравнения строятся по формуле

$$X_{k+1} = X_k + 3x_k^{2/3}\Delta t_k \qquad (10.4)$$

Если какая нибудь точка X_k окажется лежащей на оси $t(X_k)=0$, то все последующие точки не могут сойти с этой прямой $X=0$.

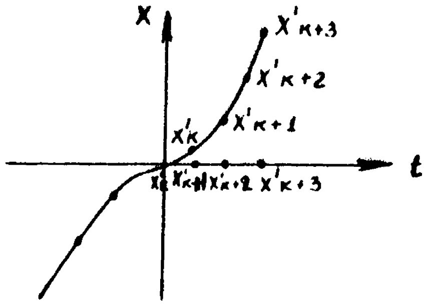


Рис.5 Ломаные Эйлера, приводящие к разным пределам

Однако небольшим изменением Δt_k можно "сбить" X_k с нуля, и тогда ломаная Эйлера будет аппроксимировать кривую $X=t^3$

п°II. Производная вдоль решения

Пусть $\mathcal{F}(\bar{x}, t)$ скалярная функция векторного аргумента $\bar{X}$ и скалярного t. Если вместо $\bar{X}$ подставить решение системы (8.2), то получится скалярная функция скалярного аргумента t:

$$f(t) = \mathcal{F}(\bar{x}(t), t) \qquad (II.1)$$

её производная может быть вычислена по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\mathcal{F}}{d\binom{\bar{x}}{t}} \cdot \frac{d\binom{\bar{x}}{t}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)\begin{pmatrix}\frac{d\bar{x}}{dt}\\ 1\end{pmatrix} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{x}}\frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{dt} \qquad (II.2)$$

Подставляя вместо производной $\frac{dx}{dt}$ ее значение, получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{d\bar{x}}\bar{a}(\bar{x},t) + \frac{\partial \mathcal{F}}{dt} \qquad (II.3)$$

Следовательно, вычисление производной от функции, содержащей решение, не требует значения самого решения. Достаточным оказывается значение уравнения. Это ценное свойство находит важное применение. Саму величину $\frac{df}{dt}$ называют производнои $\mathcal{F}(\bar{x},t)$ "вдоль решения" или производной " в силу уравнении движения", а в некоторых книгах по физике ее называют даже "полной производной" и формула (II.3) записывается в виде:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{x}}\bar{a} \qquad (II.4)$$

Это краткое обозначение весьма удобно, однако термин "полная производная, конечно, не годится. Так имеет право называться только производная по совокупности аргументов

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\binom{\bar{x}}{t}} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right) \qquad (II.5)$$

Кроме того, надо иметь в виду, что производная вдоль решения отражает взаимное свойство и функции и системы, что ясно видно из выражения (II.4), куда на равных правах входят величины $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{x}}$ и $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$, характеризующие функцию, и величина $\bar{a}(\bar{x},t)$, характеризующая систему.

Между тем обозначение $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ содержит только символ функции, система при этом лишь подразумевается.

n°12. Автономные системы. Понятие первого интеграла

Если функция $\mathcal{F}(\bar{x})$ зависит только от $\bar{x}$, а система автономна, то все изменение $\mathcal{F}$ вызывается только сдвигом вдоль решения:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{x}} \bar{a} \qquad (12.1)$$

Задача

При движении частицы в потенциальном поле, поле совершает работу над частицей. Показать, что мощность есть производная потенциала вдоль траектории.

Определение первого интеграла "в малом"

Функция $\mathcal{F}(\bar{x})$, заданная в окрестности точки x_0, непрерывно - дифференцируемая в этой окрестности и не равная тождественно постоянной, называется первым интегралом,

Если она сохраняет постоянное значение на каждом решении, целиком лежащим в области определения функции $\mathcal{F}$.

Свойство первого интеграла

Если решение $\bar{x}(t)$, лежащее в области определения первого интеграла, имеет одну общую точку с поверхностью уровня

$$\mathcal{F}(\bar{x}) = c$$

то это решение целиком лежит на этой поверхности.

Вытекает прямо из определения.

Признак первого интеграла

Для того, чтобы функция $\mathcal{F}(\bar{x})$ была первым интегралом системы, необходимо и достаточно, чтобы ее производная в силу системы обращалась в нуль

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{x}} \bar{a}(\bar{x}) \equiv 0$$

во всех точках области определения.

Признак вытекает из определения первого интеграла и теоремы анализа о постоянстве функции, производная которой равна нулю.

ГЛАВА II АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ. ЗАДАЧА КОШИ В ЦЕЛОМ.

п$^{\circ}$13. Общий вид системы с заданным первым интегралом

Автономная система на плоскости,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= b(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (13.1)$$

для вектора $\bar{x}$ с двумя компонентами

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (13.2)$$

задается векторным полем

$$\bar{a}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \end{pmatrix} \qquad (13.3)$$

Скалярная функция $H(x,y)$ есть первый интеграл этой системы, если, как это вытекает из критерия (12.3)

$$\frac{\partial H}{\partial x} a(x,y) + \frac{\partial H}{\partial y} b(x,y) = 0 \qquad (13,4)$$

т.е. ее градиент ортогонален вектору $\bar{a}$ в каждой точке $\bar{x}$. Поэтому задача отыскания первого интеграла равносильна решению уравнения с частными производными от неизвестной функции $H(x,y)$ двух переменных.

Хотя в некоторых случаях (они разобраны в п$^{\circ}$15) ответ удается найти частными приемами, общая задача отыскания решения даже одного уравнения с частными производными ничуть не легче задачи решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Зато очень просто решается (полезная теоретически и практически) обратная задача - написать систему по заданному первому интегралу.

При такой постановке задачи уравнение (13.4) превращается в одно линейное (алгебраическое, а не дифференциальное) уравнение с двумя неизвестными $a(x,y)$ и $b(x,y)$. Решая его относительно $b(x,y)$, получаем

$$b(x,y) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}}\, a(x,y) \qquad (13.5)$$

Однако такое решение неудовлетворительно, так как функцию $a(x,y)$ нельзя задавать произвольно, иначе функция $b(x,y)$ будет обращаться в бесконечность на линии, где

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \qquad (13.6)$$

Но если учесть это обстоятельство и задать формулой

$$a(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial y}\,\alpha(x,y) \qquad (13.7)$$

то и для b получается "хорошее" выражение

$$b(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}\,\alpha(x,y) \qquad (13.8)$$

Множитель α можно задавать произвольно, лишь бы это была произвольная функция переменных x и y.

Теорема

Любая система вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}\alpha(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x}\alpha(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{13.9}$$

имеет функцию $H(x,y)$ своим первым интегралом

Обратная теорема

Если $H(x,y)$ есть первый интеграл системы (13.1), то система представима в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}\alpha(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\alpha(x,y)$$

где функция $\alpha(x,y)$ непрерывна в каждой точке, где

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 \neq 0 \tag{13.10}$$

Задача

Доказать сформулированные теоремы.

n°14. Три способа задания кривой на плоскости

Три вида уравнений

каждое решение

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{14.1}$$

системы уравнений

$$\frac{dx}{dt}=a(x,y)\ ,\quad \frac{dy}{dt}=b(x,y) \tag{I4.2}$$

задает прямую на плоскости в параметрической форме.

Второй способ задания мы получим рассматривая линию уровня,

$$H(x,y)=0 \tag{I4.3}$$

функции двух переменных. Этому способу соответствует одно уравнение с частными производными

$$\frac{\partial H}{\partial x}A(x,y)+\frac{\partial y}{\partial y}B(x,y)=0 \tag{I4.4}$$

Наконец, третий, хорошо известный из анализа способ задания кривой, это график функции одной переменной

$$y=y(x) \tag{I4.5}$$

Ему соответствует одно обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=H(x,y) \tag{I4.6}$$

Для кривой в целом (глобально) эти способы неэквивалентны, что хорошо видно уже на примере окружности. Однако в окрестности регулярной точки все три способа равносильны.

Задача

Привести пример функции $H(x,y)$ линия уровня которой состоит из двух отдельных замкнутых кривых.

Более того все три способа определяют (локально) одну и ту же кривую, если выполнены тождества

$$\frac{a(x,y)}{b(x,y)} \equiv \frac{A(x,y)}{B(x,y)} \equiv K(x,y) \qquad (14.7)$$

Сформулируем и докажем самую трудную из шести (почему их шесть?) теорем, которые надо доказать, чтобы сделать точным высказанное утверждение.

<u>Вопрос</u>

Всегда ли можно y задавать как функцию x?

<u>Теорема</u>

Пусть

$$y = f(x,c) \qquad (14.8)$$

есть семейство решений уравнения (14.6), существенно зависящее от параметра C. Это значит, что существует точка x_0, C_0, такая, что

$$\left.\frac{\partial f}{\partial c}\right|_{x_0,c_0} \neq 0 \qquad (14.9)$$

Тогда функция двух переменных $H(x,y)$, задаваемая неявным образом уравнением

$$y - f(x,H) = 0 \qquad (14.10)$$

удовлетворяет $\left(\text{в окрестности точки } x_0, y_0, \text{ где } x_0 = f(x_0, C_0)\right)$ уравнению в частных производных (I4.4), если выполнено условие эквивалентности (14.7).

<u>Доказательство</u>

Так как $y = f(x)$ есть решение уравнения (I4.6) при каждом фиксированном C, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = k(x, y) \tag{I4.II}$$

По теореме о неявной функции, частные производные H можно найти, дифференцируя равенство (I4.I0) по x и y соответственно:

$$\left.\begin{aligned} & 0 - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ & 1 - \frac{\partial f}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{I4.I2}$$

(где используется условие (I4.9 г). Отсюда, с учетом (I4.II) имеем:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial H}} k(x, y) \\ & \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial H}} \end{aligned}\right\} \tag{I4.I3}$$

Умножая первое равенство на $A(x,y)$, второе на $B(x,y)$ и складывая, получим

$$\frac{\partial H}{\partial x} A(x,y) + \frac{\partial H}{\partial y} B(x,y) = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial H}} \left[B(x,y) - k(x,y) A(x,y)\right],$$

Отсюда следует утверждение теоремы, если функции A и B связаны соотношением эквивалентности.

Задача

Сформулировать и доказать остальные пять теорем.

Задача

Сколько разных форм теоремы о неявной функции надо использовать в доказательстве шести теорем.

n^0 I5. Частные приемы интегрирования

А. Системы в полных дифференциалах

Так называются системы, правые части которых удовлетворяют тождеству

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \equiv 0 \qquad (I5.A)$$

Интеграл находится двумя квадратурами:

$$H(x,y) = \int_{x_0}^{x} b(\xi, y_0)\, d\xi - \int_{y_0}^{y} a(x,\eta)\, d\eta \qquad (I5.I)$$

Доказательство

сводится к применению теоремы о дифференцировании интеграла по параметру и проверке двух тождеств

$$\frac{\partial H}{\partial x} = b(x,y), \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -a(x,y) \tag{15.2}$$

которые и служат основой для написания формулы (15.1)

В. Уравнения с разделяющимися переменными

Так называются системы вида

$$\frac{dx}{dt} = a_1(x)a_2(y)$$
$$\frac{dy}{dt} = b_1(x)\, b_2(y) \tag{15.3}$$

Метод интегрирования основан на том, что существует эквивалентное уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial x} A(x) + \frac{\partial H}{\partial y} B(y) = 0 \tag{15.3}$$

имеющее решение, состоящее из двух слагаемых

$$H(x,y) = X(x) + Y(y) \tag{15.4}$$

отыскание которого сводится к двум квадратурам

$$X(x) = -\int \frac{dx}{A(x)} \tag{15.5}$$

$$Y(y) = \int \frac{dy}{B(y)}$$

Функции $A(x)$ и $B(y)$ находятся из условия эквивалентности (14.7)

$$A(x) = \frac{a_1(x)}{b_1(x)} \tag{15.6}$$

$$B(y) = \frac{b_2(y)}{a_2(y)}$$

Отсюда вытекает правило интегрирования, состоящее в делении друг на друга уравнений системы и разделении переменных

$$\int \frac{b_1(x)}{a_1(x)}\,dx = \int \frac{a_2(y)}{b_2(y)}\,dy \tag{I5.7}$$

С. <u>Однородные уравнения</u>

Однородными называют функции $u(x,y)$, удовлетворяющие тождеству

$$u(\mu x, \mu y) \equiv \mu^n u(x,y) \tag{I5.8}$$

n - называется измерением однородности.

Дифференциальное уравнение,

$$\frac{dy}{dx} = k(x,y) \tag{I5.C}$$

правая часть которого является однородной функцией нулевого измерения, называется однородным.

Метод интегрирования основан на сведении к разделяющимся переменным введением новой неизвестной функции

$$u = \frac{y}{x} \tag{I5.9}$$

Уравнение для u получается дифференцированием выражения $y = ux$ по независимой переменной x

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} = k(x,y) = k\left(1, \frac{y}{x}\right) = k_0(u)$$

Откуда
$$\frac{du}{dx} = \frac{k_0(u) - u}{x}$$

и следовательно

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{k_0(u) - u} \tag{I5.I0}$$

на основании формулы (I5.7).

Д. Линейные уравнения

Если правая часть уравнения

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x) \qquad (15.Д)$$

линейно зависит от y и произвольным образом от x, то это уравнение можно проинтегрировать весьма остроумным и глубоким приемом Бернулли.

Он состоит в том, что вводят два новых переменных u и v вместо одного

$$y = uv \qquad (I5.II)$$

что позволяет к уравнению

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} = p(x)uv + q(x), \qquad (I5.I2)$$

вытекающему из (I5.Д), дописать совершенно произвольно еще одно. Оказывается, это новое уравнение можно выбрать так, что интегрирование сведется к двум квадратурам

Полагая

$$\frac{du}{dx} = p(x)u \qquad (15.I3)$$

получают для v уравнение

$$u\frac{dv}{dx} = q(x) \qquad (I5.14)$$

которое вместе с /уравнением для u равнозначно уравнению (I5.Д) для y.

Первое из полученных уравнений является уравнением с разделяющимися переменными и легко интегрируется

$$u(x) = e^{\int p(x)\,dx} \qquad (15.15)$$

а второе становится тоже уравнением с разделяющимися переменными после того, как проинтегрировано первое:

$$V(x) = c + \int \frac{q(x)}{u(x)}\,dx \tag{15.16}$$

Е. Уравнение Бернулли

Тот же прием успешно работает для уравнения Бернулли:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^{n} \tag{15.E}$$

но проще свести его прямо к линейному заменой переменной

$$z = y^{1-n}$$

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}[p(x)y + q(x)y^{n}] = \tag{15.7}$$

$$= (1-n)y^{1-n}p + (1-n)q = \bar{p}(x)z + \bar{q}(x).$$

Эта замена переменных не проходит, если $n = 1$, так как тогда не существует обратного преобразования

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} \tag{15.19}$$

Но в этом случае уравнение Бернулли принадлежит пересечению класса линейных уравнений с классом уравнений с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = r(x)y \tag{15.20}$$

и проинтегрируется непосредственно.

п^{О} 16. Геометрия и кинетика. Периодические решения

Если первый интеграл системы известен, то ее геометрия–фазовый портрет–полностью определена. На основании теоремы о неявной функции соотношение

$$H(x,y) = C \tag{16.1}$$

можно решить относительно y и получить зависимость y от x

$$y = f(x) \tag{16.2}$$

Подставляя это выражение в уравнение для x ,

$$\frac{dx}{dt} = a(x, f(x)) \tag{16.3}$$

получим уравнение с разделяющимися переменными,

$$\frac{dx}{a(x, f(x))} = dt \tag{16.4}$$

решение которого приводится к одной квадратуре:

$$t = t_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{a(x, f(x))} \tag{16.5}$$

На отрезке, где величина a сохраняет знак, формула (16.4) позволяет найти зависимость

$$x = x(t) \tag{16.6}$$

на основании теоремы анализа о существовании обратной у монотонной функции.

Вместе с найденной ранее зависимостью (16.2) формула (16.5) решает вопрос об отыскании зависимости x и y от t

$$\bar{X} = \bar{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{16.7}$$

в окрестности любой точки, где справедливы те две теоремы анализа, на которых основано все рассуждение. Условие применимости первой из них (теоремы о неявной функции) это неравенство

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} \neq 0 \qquad (16.8)$$

теорема обращения монотонной функции (16.4) справедлива если

$$a(x_0, y_0) = 0 \qquad (16.9)$$

проведенное рассмотрение решает вопрос локально. Однако часто нужно бывает знать свойства решения в целом, глобально.

Разберем важный частный случай периодических решений.

Теорема

Предположим, что

$$H(x, y) = c \qquad (16.10)$$

суть замкнутая линия уровня первого интеграла системы. Предположим далее, что все точки этой линии регулярны в том смысле, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \neq 0 \qquad (16.11)$$

и

$$a^2(x, y) + b^2(x, y) \neq 0 \qquad (16.12)$$

Тогда эта линия уровня есть траектория периодического решения системы

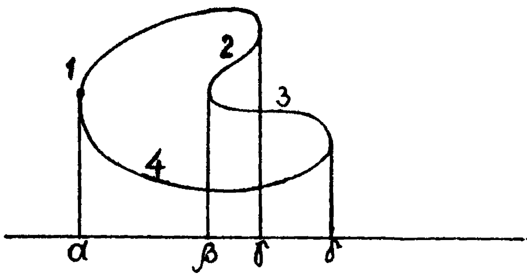
$$\begin{aligned} x(t+T) &= x(t) \\ y(t+T) &= y(t) \end{aligned} \qquad (16.13)$$

а период T может быть вычислен по формуле

$$T = \sum_i \int_{x_i'}^{x_i''} \frac{dx}{|a(x, f_i(x))|} \qquad (16.14)$$

где $f_i(x)$ - все ветви неявной функции (I6.9) а x_i', x_i'' границы области существования каждой ветви.

Так в примере, приведенном на рис.I, есть четыре ветви, границы областей существования некоторых совпадают с точками, в которых касательная к линии уровня вертикальна



В этом случае

$$X_1' = \alpha \qquad X_1'' = \gamma$$
$$X_2' = \beta \qquad X_2'' = \gamma$$
$$X_3' = \beta \qquad X_3'' = \delta$$
$$X_4' = \alpha \qquad X_4'' = \delta$$

В общей формуле (I6.3) можно брать функцию по абсолютной величине и интегрировать в направлении возрастания X.

Можно, однако, интегрировать в направлении возрастания времени и тогда функцию a следует брать с тем знаком, с которым она входит в уравнение.

Доказательство

При доказательстве ограничимся простейшим (и вместе с тем важнейшим) случаем механических систем,

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2m} + U(x) \tag{I6.I5}$$

для которого каждая линия уровня

$$\frac{y^2}{2m} + U(x) = E \tag{I6.I6}$$

распадается на овалы, каждый из которых имеет ровно две ветви

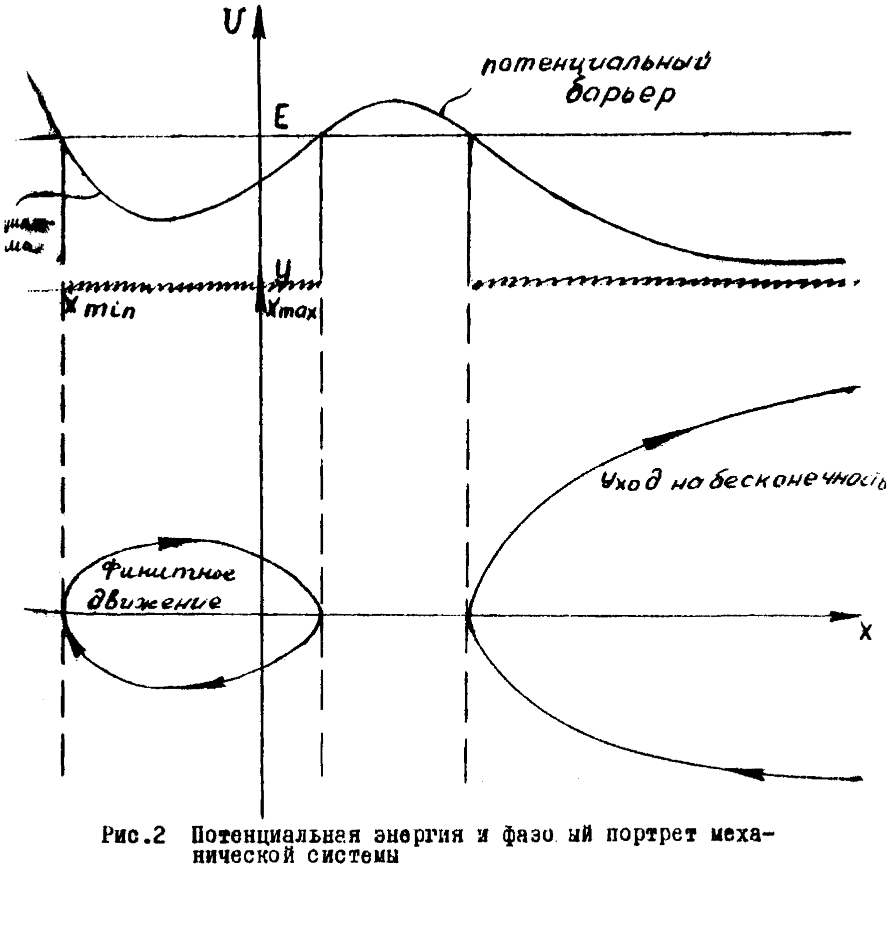


Рис.2 Потенциальная энергия и фазовый портрет механической системы

Уравнения движения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{y}{m} \tag{16.17}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x} = f(x)$$

на верхней ветви овала

$$y = \sqrt{2m\,[E-u(x)]} \tag{16.18}$$

приводит к одному уравнению, определяющему кинетику

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,\sqrt{E-u(x)}$$

из которого можно найти зависимость t от x

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E-u(x)}} \tag{16.19}$$

Определим произвольную постоянную t_0 условием, чтобы при $t=0$ переменное x принимало наименьшее значение

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{x_{min}}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E-u(x)}} \tag{16.20}$$

График этой функции имеет вертикальную касательную в точке x_{min} и в точке x_{max}, т.е. как раз в граничных точках области существования подынтегральной функции

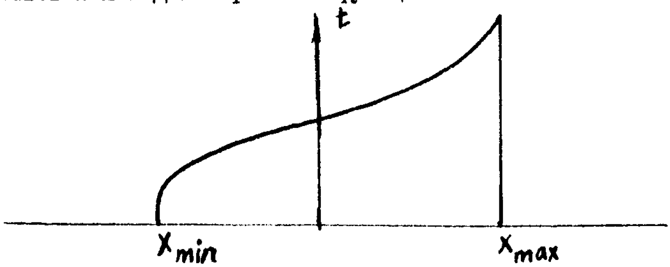


Рис.3. Зависимость времени от координаты, получаемая прямым интегрированием.

По теореме обращения монотонной функции можно построить обратную функцию $X=X(t)$, заданную на отрезке ($0, \frac{T}{2}$), где

$$\frac{T}{2}=\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{X_{min}}^{X_{max}}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} \tag{I6.2I}$$

Эта функция имеет горизонтальную касательную при $t=0$ и $t=\frac{T}{2}$

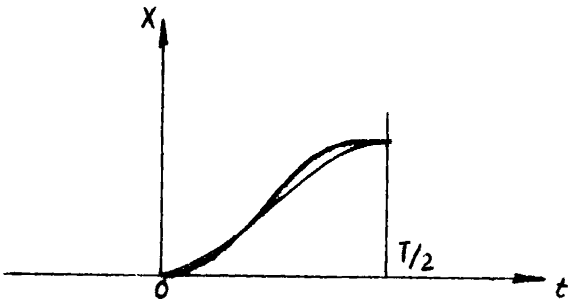


Рис.4 Обратная функция

нижней части овала

$$y=-\sqrt{2m\left[E-V(x)\right]} \tag{I6.22}$$

соответствует зависимость t от X , задаваемая формулой

$$t=t_0'-\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{X_0}^{X}\frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}} \tag{I6.23}$$

Произвольную постоянную t_0' определяем из условия "склейки" с найденным ранее решением. Это значит, что при $X = X_{max}$ $t = T/2$

$$\frac{T}{2} = t_0' - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{X_0}^{X_{max}} \frac{dX}{\sqrt{E - U(x)}} . \qquad (16.24)$$

Подстановка найденного значения t_0' в (16.21) дает

$$t = \frac{T}{2} + \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{X}^{X_{max}} \frac{dX}{\sqrt{E - U(x)}} \qquad (16.25)$$

и мы получаем вторую ветвь многозначной функции $t = t(x)$

Её график приведен ниже:

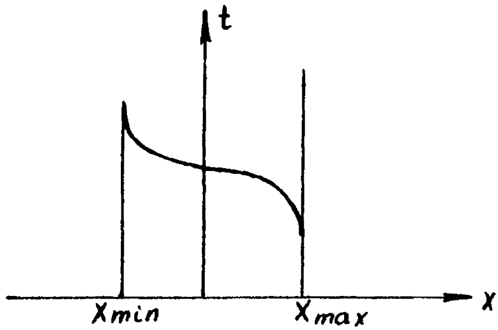


Рис. 5 Вторая ветвь функции

Границы области существования этой второй ветви совпадают с границами первой ветви, так как определяются областью существования подынтегральной функции.

Еще раз применяя теорему обращения монотонной функции, получаем функцию $X(t)$, заданную на отрезке ($\frac{T}{2}, T$) и являющуюся, как нетрудно показать отражением ранее построенной функции относительно точки $T/2$

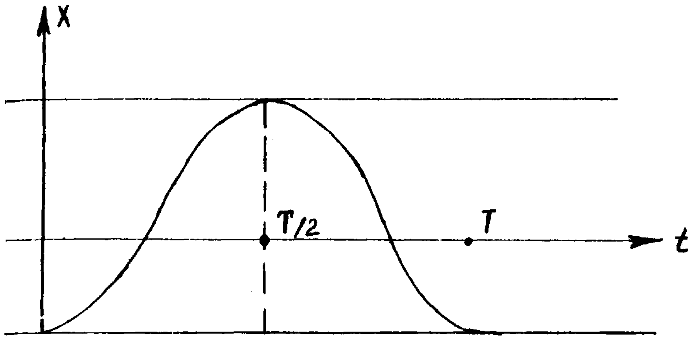


Рис. 6 Функция $X(t)$ на полном периоде

Функцию $y(t)$ строим также на двух отрезках ($0, \frac{T}{2}$) и ($\frac{T}{2}, T$) при помощи формулы (I6.I7) на первом и формулы (I6.20) на втором. Получается кривая, симметричная относительно точки ($\frac{T}{2}, 0$), дифференцируемая на всем отрезке (0.T)

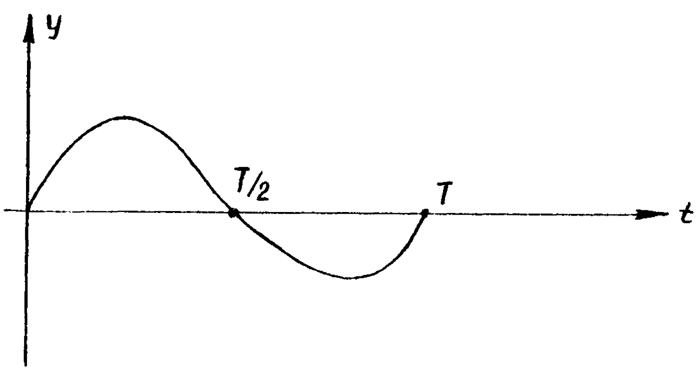


Рис. 7 Полный период функции

Построим теперь функцию $\bar{X}(t)$ на всей прямой, продолжая ее периодически с отрезка (0,T). Нетрудно показать, что получается дифференцируемая вектор-функция переменной t, удовлетворяющая системе на всей оси t.

Формула для периода

$$T = \sqrt{2m}\int_{X_{min}}^{X_{max}} \frac{dX}{\sqrt{E-U(X)}} \tag{16.26}$$

Задача I

Доказать дифференцируемость $X(t)$ и $y(t)$ в точках $t=T/2$ и $t=T$. Доказать, что система удовлетворяется в этих точках.

Указание

В окрестностях этих точек искать Х как функцию У и провести доказательство двойственное (замена Х на У и У на Х) к приведенному.

Задача 2

Показать, что для функции

$$U = \alpha X^2 + \frac{\beta}{X^2}$$

период не зависит от энергии колебаний Е.
Найти зависимость от констант α и β. Вычислить период.

ГЛАВА III ОКРЕСТНОСТЬ РЕГУЛЯРНОЙ ТОЧКИ. ЗАДАЧА КОШИ.

п°17. Метод последовательных приближений. Теорема о неявной функции

Пусть дана система уравнений относительно $y^1, \dots, y^m$, правые части которой зависят также от переменных $x^1, \dots, x^n$;

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^m) = 0 \\ F^2(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ F^m(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^m) = 0 \end{cases} \tag{17.1}$$

Левые части этой системы можно считать компонентами одной вектор функции F двух векторных аргументов Х и У, причем F и Y имеют одинаковую размерность, а Х-любую *) другую. Систему (17.1) можно поэтому записать в виде одного векторного уравнения

$$F(x, y) = 0 \tag{17.2}$$

левую часть которого мы будем предполагать непрерывно-дифференцируемой функцией совокупности аргументов Х и У

$$\frac{dF}{d\binom{x}{y}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) \tag{17.3}$$

Матрица $\frac{\partial F}{\partial x}$ прямоугольная, а матрица $\frac{\partial F}{\partial y}$ обязательно

---

*) Возможно, в частности, что Х вообще не входит в уравнения. Этот случай требует особого рассмотрения

квадратная- число неизвестных равно числу уравнений.

Предположим далее, что уравнение (I7.2) выполнено хотя бы в одной точке,

$$F(x_0, y_0) = 0 \tag{I7.4}$$

и докажем, что оно определяет У как функцию Х,

$$y = f(x) \tag{I7.5}$$

если функция $F(x,y)$ существенно зависит от У, то есть

$$\det \left| \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \right|_{(x_0 y_0)} \neq 0 \tag{I7.6}$$

<u>Доказательство</u>

Заменим заданное уравнение эквивалентным уравнением специального вида,

$$y - \varphi(x,y) = 0 \tag{I7.7}$$

и поэтому последовательность функций Х:

$$y_{n+1}(x) = \varphi(x, y_n(x)) \tag{I7.8}$$

начиная с постоянной

$$y_0(x) = y_0 \tag{I7.9}$$

Можно указать много разных способов построения уравнения, эквивалентного исходному. Однако такая замена полезна лишь в том случае, когда последовательные приближения $y_n(x)$ сходятся к решению. Из всех способов отметим два.

В методе Ньютона полагают:

$$\varphi(x,y) = y - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} F(x,y) \tag{17.10}$$

Метод последовательных приближений (в узком смысле) отличается от метода Ньютона тем, что производную $\frac{\partial F}{\partial y}$ и, обратную к ней матрицу $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}$ вычисляют только один раз, в исходной точке и полагают

$$\varphi(x,y) = y - AF(x,y) \tag{17.11}$$

где

$$A^{-1} = \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0 y_0)} \tag{17.12}$$

Метод Ньютона весьма популярен в вычислительной практике. Он обеспечивает высокую скорость сходимости, правда за счет повышенных требований к дифференцируемости $F(x,y)$ и на меньшей, обычно, области.

В упрощенном методе частная производная $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = E - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}, \tag{17.13}$$

обращается в нулевую матрицу при $y = x_0$, $y = y_0$. Так как матрица $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна, то для каждого q существует в пространстве (X,У) область G_q в которой выполнено неравенство

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right| < q < 1 \tag{17.14}$$

Внутри этой области функции $y_n(x)$ сходятся быстрее частных сумм геометрической прогрессии со знаменателем q.
В самом деле

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) = \varphi(x, y_n) - \varphi(x, y_{n-1}) \tag{17.15}$$

На основании леммы Адамара

$$\varphi(x, y_n) - \varphi(x, y_{n-1}) = B(y_n - y_{n-1}) \tag{17.16}$$

где B есть среднее значение производной $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ на отрезке, соединяющем точки (x, y_n) и (x, y_{n-1}). Пока этот отрезок принадлежит области G_q можно утверждать, что

$$|B| < q \tag{17.17}$$

и, следовательно,

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| < q\,|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \tag{17.18}$$

откуда методом индукции можно вывести оценку:

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| < q^n |y_1 - y_0| \tag{17.19}$$

Приведенное рассуждение нуждается в уточнении. Оценки справедливы только для области G_q. Нужно, поэтому выбрать настолько малую окрестность точки x_0 в пространстве X, чтобы все последовательные приближения $y_n(x)$ целиком лежали в области G_q. Это можно сделать, а детали рассуждения представляем читателю.

п^{0} 18 Задача Коши для нормальной системы. Эквивалентное интегральное уравнение

Нормальная система

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t) \tag{18.1}$$

имеет много решений, что видно уже на простейшем примере постоянной правой части

$$\frac{dx}{dt} = a \tag{18.2}$$

когда решение выписывается в явной форме

$$X = X_0 + at \tag{18.3}$$

В этом случае движение является равномерным прямоугольным движением со скоростью a. Различные решения отличаются друг от друга значением вектора X_0, смысл которого выясняется, если положить

$$X(0) = X_0 \tag{18.4}$$

Следовательно, X_0 есть положение вектора X в начальный момент времени.

Задача Коши в общем случае

Для замкнутой системы уравнений (18.1) найти решение $X(t)$, принадлежащее заданному значению X_0 в заданный момент времени t_0

$$X(t_0) = X_0 \tag{18.5}$$

Предположим, что уравнение (18.1) с непрерывной правой частью $a(x, t)$ имеет решение

$$x = x(t) \tag{18.6}$$

задачи Коши (18.5). По определению решения подстановка его в уравнение обращает уравнение в тождество

$$\frac{dx}{dt} \equiv a(x(t), t) \tag{18.7}$$

Интегрируя обе части этого тождества по t на отрезке от t_0 до t получим

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{d\tau} d\tau = \int_{t_0}^{t} a(x(\tau), \tau)\, d\tau \tag{18.8}$$

где переменная интегрирования обозначена буквой τ, чтобы не смешивать ее с верхним пределом t.

Предположим, что решение $x(t)$ есть непрерывно-дифференцируемая функция t. Тогда к левой части равенства (18.8) применима формула Ньютона-Лейбница и уравнение (18.8) приобретает форму интегрального уравнения:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(x(\tau), \tau)\, d\tau \tag{18.9}$$

Сформулируем полученное утверждение в виде теоремы.

Теорема I

Каждое непрерывно-дифференцируемое решение задачи Коши для нормальной системы уравнений с непрерывной правой частью $a(x,t)$ удовлетворяет интегральному уравнению.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2

Если функция $a(x,t)$ непрерывна по совокупности аргументов, то решение $x(t)$ интегрального уравнения (18.9) является непрерывно-дифференцируемой функцией t, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t) \quad . \tag{18.10}$$

и начальным данным (Задача Коши)

$$x(t_0) = x_0 \tag{18.11}$$

Доказательство

Условия теоремы предполагают только существование решения. поэтому даже непрерывность функции $x(t)$ нужно доказывать. Составив разность $x(t+\Delta t) - x(t)$ преобразим ее, используя свойства интеграла

$$x(t+\Delta t) - x(t) = \int_t^{t+\Delta t} a(x(\tau),\tau)\,d\tau \tag{18.12}$$

Отсюда нетрудно получить оценку

$$|x(t+\Delta t) - x(t)| \leqslant \alpha \Delta t \tag{18.13}$$

из которой непосредственно вытекает непрерывность.
В качестве α можно выбрать максимум модуля функции $a(x,t)$ по области целиком содержащей решение $x(t)$

$$\alpha = \max |a(x,t)| \tag{18.14}$$

<u>Задача</u>. Сформулировать теоремы анализа о непрерывных функциях и свойства интеграла, на которых основана оценка (18.13).

Для доказательства дифференцируемости составим разностное отношение, служащее для определения производной $\frac{\Delta x}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} a(x(\tau),\tau)\,d\tau \qquad (18.15)$$

Докажем, что предел при $\Delta t \to 0$ правой части существует и равен $a(x(t),t)$

$$\lim \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} a(x(\tau),\tau)\,d\tau = a(x(t)t) \qquad (18.16)$$

В самом деле при $\Delta t > 0$

$$\left|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} a(x(\tau),\tau)\,d\tau - a(x(t),t)\right| = \qquad (18.17)$$

$$\frac{1}{|\Delta t|}\left|\int_t^{t+\Delta t}[a(x(\tau),\tau)-a(x(t),t)]\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta t|}\int_t^{t+\Delta t}|a(x(\tau),\tau)-a(x(t),t)|\,d\tau$$

Вопрос: Где использовано условие $\Delta t > 0$?

Непрерывность $x(t)$ вместе с непрерывностью $a(x,t)$ приводит к непрерывности $a(x(\tau),\tau)$ по аргументу τ и неравенству

$$|a(x(\tau),\tau) - a(x(t),t)| < \mathcal{E} \qquad (18.18)$$

при достаточно малых Δt , откуда вытекает неравенство

$$\left|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} a(x(\tau),\tau)\,d\tau - a(x(t),t)\right| < \mathcal{E} \qquad (18.19)$$

доказывающее существование предела, так как ε может быть сделано сколь угодно малым выбором достаточно малого Δt.

Но если предел правой части существует, то предел левой части также существует и равен пределу правой части. Так как пределом левой части по определению является производная, то доказано равенство:

$$\frac{dx}{dt} = a\,(x\,(t), t) \tag{18.20}$$

являются просто более подробной записью дифференциального уравнения (18.10). Из равенства (18.9) вытекает также, что

$$|x(t) - x_0| \leq \Big| \int_{t_0}^{t} a(x,\tau)\,d\tau \leq \alpha\, |t - t_0| \tag{18.21}$$

откуда видно, что функция $x\,(t)$ непрерывна и в точке t_0. Её предельное значение совпадает поэтому со значением в точке t_0 и равно заданному вектору x_0 :

$$x\,(t_0) = x_0 \tag{18.22}$$

Доказательство теоремы завершено.

Переход от дифференциального уравнения к интегральному аналогичен переходу от неявного уравнения $F\,(x, y) = 0$ к "полуявному" $Y = \varphi\,(x, y)$ который тем полезнее, чем "меньше У остается в правой части".

Однако в алгебраической задаче стремятся "старые решения не потерять, новые не приобрести", напротив того, переход к интегральному уравнению отсекает континуум решений, позволяя сосредоточить внимание на одном.

п°19 Метод последовательных приближений Пикара. Случай линейных систем с постоянными коэффициентами

Вид интегрального уравнения (18.9) подсказывает (по аналогии с теоремой о неявной функции) идею отыскания решения последовательным уточнением (Метод Пикара)

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(x_n(\tau), \tau)\, d\tau \tag{19.1}$$

начиная с простейшего приближения

$$x_0(t) = x_0 \tag{19.2}$$

Полезно выяснить главные особенности метода Пикара на простейшем примере системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n \\ \frac{dx^2}{dt} &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n \\ &\cdots \\ \frac{dx^n}{dt} &= a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \cdots + a^n x^n \end{aligned} \tag{19.3}$$

с постоянными коэффициентами

$$a_k^i = \mathrm{const} \tag{19.4}$$

Обозначая буквой A постоянную матрицу коэффициентов системы (19.3)

$$A = \left(\begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{matrix}\right) \tag{19.5}$$

Поставим для уравнения (19.5) задачу Коши. Задача Коши: Найти решение $x(t)$ проходящее в момент времени $t=0$ через точку ξ

$$x(0) = \xi \tag{19.6}$$

Интегральное уравнение соответствующее этой задачи Коши, имеет вид:

$$x(t) = \xi + \int_0^t A x(\tau) d\tau \tag{19.7}$$

Найдем последовательные приближения по методу Пикара. Нулевое приближение не зависит от времени и совпадает с начальными данными:

$$x_0(t) \equiv \xi \tag{19.8}$$

Первое приближение получается при подстановке в правую часть уравнения (19.8) нулевого приближения. Несложные выкладки дают:

$$x_1(t) = (E + tA)\xi \tag{19.9}$$

где буквой E обозначена единичная матрица.

Вопрос. Какие свойства матриц, векторов и интегралов от векторной функции использованы при выводе (19.10)?

Найдем далее $x_2(t)$, подставляя вместо $x(\tau)$ найденное значение $x_1(\tau)$

$$x_2(t) = \left(E + tA + \frac{1}{2} t^2 A^2\right)\xi \tag{19.10}$$

Третье приближение имеет вид

$$x_3(t) = \left(E + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \frac{1}{2\cdot 3}t^3A^3\right)\xi \qquad (19.11)$$

подсказывающий, что в знаменателях стоят факториалы. После этого натрудно угадать общий вид формулы для "n"-ого приближения:

$$x_n(t) = \left(E + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \ldots + \frac{t^nA^n}{n!}\right)\xi \qquad (19.12)$$

Докажем эту формулу методом полной индукции по методу "п". Предположим, что формула (19.13) имеет место для некоторого "п" и докажем, что она верна для п+1. В самом деле,

$$x_{n+1}(t) = \xi + \int_0^t Ax_n(\tau)d\tau = \xi + \int_0^t A\left(E + \frac{\tau A}{1!} + \frac{\tau^2A^2}{2!} + \ldots \frac{\tau^nA^n}{n!}\right)\xi\, d\tau =$$

$$= \xi + \int_0^t \left(A + \frac{\tau A^2}{1!} + \frac{\tau^2A^3}{2!} + \ldots + \frac{\tau^nA^{n+1}}{n!}\right)\xi\, d\tau =$$

$$= \xi + \left(\int_0^t d\tau\right)A\xi + \left(\int_0^t \frac{\tau}{1!}d\tau\right)A^2\xi + \left(\int_0^t \frac{\tau^2}{2!}d\tau\right)A^3\xi + \ldots + \left(\int_0^t \frac{\tau^n}{n!}d\tau\right)A^{n+1}\xi = \qquad (19.13)$$

$$= \left[E + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \ldots + \frac{t^{n+1}A^{n+1}}{(n+1)!}\right]\xi .$$

Вторая часть доказательства по индукции (о которой часто забывают), состоит в проверке справедливости индуктивного предположения хотя бы для одного п. Если в нашем случае проверить это для п=3, то проведенное расхождение будет доказательством только для всех п≥3. Удобнее, поэтому, проверить справедливость утверждения для п=1 и доказать тем самым формулу для всех натуральных чисел. Устремляя , получаем представление решения в виде формального ряда:

$$x(t) \div \xi + \frac{tA}{1!}\xi + \frac{t^2A^2}{2!}\xi + \ldots + \frac{t^nA^n}{n!}\xi + \ldots \qquad (19.14)$$

Очень важно помнить, что слева в формуле соответствия стоит вектор функции $x(t)$, а справа указан общий рецепт (алгоритм) получения функции $x_n(t)$ с любым номером "п". Нельзя, поэтому, писать знак равенства между столь разнородными предметами. Чтобы двинуться дальше, докажем теорему.

Теорема I

Рдя вектор функций скалярного аргумента

$$\xi + \frac{tA}{1!}\xi + \frac{t^2A^2}{2!}\xi + \cdots + \frac{t^nA^n}{n!}\xi + \cdots \tag{I9.I5}$$

сходятся абсолютно на всей оси $-\infty < t < +\infty$
На каждом конечном интервале $-T \leq t \leq T$ сходимость равномерна.

Доказательство

Обозначим через N норму матрицы А,

$$N = \sup_{|\lambda| = 1} |A\lambda| \tag{I9.I6}$$

а через α норму вектора начальных данных

$$\alpha = |\xi| \tag{I9.I7}$$

Построим числовой ряд с положительными коэффициентами,

$$\alpha + \frac{TN}{1!}\alpha + \frac{T^2N^2}{2!}\alpha + \cdots + \frac{T^nN^n}{n!}\alpha + \cdots = \alpha e^{NT} \tag{I9.I8}$$

сходящийся, как доказывается в анализе к функции αe^{NT}. Нетрудно показать, что члены этого сходящегося ряда мажорируют на отрезке

$$\left|\frac{t^n A^n}{n!}\xi\right| \leqslant \frac{T^n N^n}{n!}\alpha \tag{19.19}$$

Нормы членов векторного ряда (19.16).

На основании общих признаков сходимости анализа, векторный ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $-T \leqslant t \leqslant T$

Вопрос. Какие свойства норм использованы при доказательстве неравенства (19.20). Какую роль играет неравенство треугольника при доказательстве сходимости?

Так как T можно выбрать произвольно, теорема доказана. На основании этой теоремы мы вправе рассматривать вектор-функцию

$$\xi(t) = \xi + \frac{tA}{1!}\xi + \frac{t^2A^2}{2!}\xi + \dots + \frac{t^nA^n}{n!}\xi + \dots \tag{19.20}$$

равную сумме ряда (19.16).

Только сейчас приобретает смысл вопрос о равенстве левой и правой части соотношения (19.15)

$$x(t) = \xi(t) \tag{19.21}$$

так как слева и справа теперь стоят вектор-функции одного и того же скалярного аргумента t, принимающие значения в одном и том же пространстве $\mathcal{X}$. Более того, доказанная теорема означает, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = \xi(t) \tag{19.22}$$

причем сходимость равномерная на каждом конечном интервале времени. Однако эта теорема еще не дает основания утверждать даже то, что функция $\xi(t)$ является решением уравнения (19.8).

Докажем поэтому вторую теорему.

Теорема II.

Предел последовательных приближений $x_n(t)$ вектор-функция $\xi(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t A\xi(\tau)d\tau \tag{19.23}$$

Доказательство

Последовательные приближения связаны друг с другом соотношением

$$x_{n+1}(t) = \xi_0 + \int_0^t A x_n(\tau)d\tau \tag{19.24}$$

По доказанному существует предел левой части и равен $\xi(t)$

Следовательно предел правой части также существует

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^t A x_n(\tau)d\tau\right] = \xi(t) - \xi_0 \tag{19.25}$$

Но так как $x_n(t)$ сходятся к функции $\xi(t)$ равномерно - вот это и есть главный пункт доказательства - то на основании теоремы анализа о равномерной сходимости под знаком интеграла можно написать

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t A x_n(\tau)d\tau = \int_0^t A\left[\lim_{n\to\infty} x_n(\tau)\right]d\tau = \int_0^t A\xi(\tau)d\tau \tag{19.26}$$

и окончательно получаем требуемое соотношение:

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t A\xi(\tau)\,d\tau \tag{19.27}$$

Вторая теорема доказана и стало ясно, почему в первой теореме нужно было доказывать не просто сходимость, а именно равномерную сходимость.

Однако даже сейчас нельзя утверждать, что $x(t) = \xi(t)$, несмотря на то, что это два решения одного и того же уравнения и даже совпадающие в точке $t=0$

$$x(0) = \xi(0) = \xi \tag{19.28}$$

Теорема, доказанная в этом параграфе, является теоремой существования.

Указан способ, при помощи которого заведомо можно построить решение. Но из этого вовсе не вытекает, что любое решение строится именно таким способом. Поэтому тождество

$$x(t) \equiv \xi(t) \tag{19.29}$$

(в самом деле имеющее место) можно будет установить позже, только после доказательства теоремы единственности. Закончим этот параграф формулировкой теоремы, доказательство которой вполне аналогично только что проведенному.

Теорема III

Матричное уравнение

$$\frac{dS}{dt} = A_r S \tag{19.30}$$

где A квадратная матрица с постоянными коэффициентами, а S – квадратная матрица с переменными коэффициентами, имеет решение, являющееся суммой абсолютно сходящегося ряда

$$S(t) = E + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^nA^n}{n!} + \cdots \tag{19.31}$$

Этот ряд сходится равномерно на каждом конечном интервале, а его сумму принято называть матричной экспонентой и обозначить $exp(tA)$

$$S(t) = exp(tA) = e^{tA} \tag{19.32}$$

Найденное выше решение векторного уравнения выражается через матричное решение формулой

$$\xi(t) = e^{tA}\xi \tag{19.33}$$

т.е., одно решение матричного уравнения дает все решения векторного уравнения.

п° 20 Метод Пикара. Теорема существования

А. Для линейных систем последовательные приближения сходятся на всей оси t. Иначе обстоит дело в общем случае. Пусть, например,

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \tag{20,1}$$

Это скалярное уравнение с разделяющимися переменными имеет семейство решений,

$$x = \frac{1}{\xi - t} \tag{20.2}$$

Решение при $t=c$ имеет полюс первого порядка

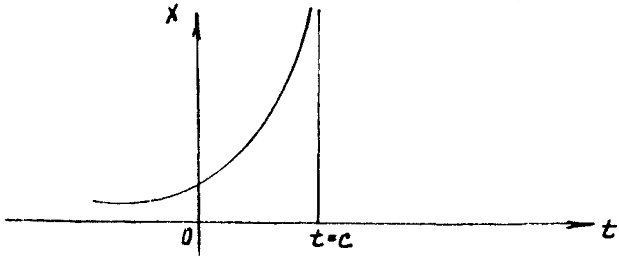


Рис. 1 Полюс простейшего нелинейного уравнения

Поэтому нет основания ожидать сходимости последовательных приближений не только на всей оси t , но вообще на любом отрезке, содержащем полюс решения.

Б. Лемма (Априорная*) оценка. Ограниченность правых частей

Если вдоль решения интегрального уравнения

$$x(t)=\lambda_0+\int_{t_0}^{t} a(x,\tau)\,d\tau \tag{20.4}$$

функция $a(x,\tau)$ ограничена (по норме) числом m , то решение лежит внутри конуса К,

$$|a(x,t)|\leq m \tag{20.5}$$

задаваемого неравенством

$$|x-x_0|\leq m\,|t-t_0| \tag{20.6}$$

---

*) *Apriori* - заранее. Схема априорных рассуждений:

если решение существует, то оно обладает таким-то свойством.

Доказательство

(20.4) на основании теорем анализа (перечислить эти теоремы) имеем при $t \geq t_0$

$$|x(t)-x_0| \leq \left|\int_{t_0}^{t} a(x,\tau)d\tau\right| \leq \int_{t_0}^{t} |a(x,\tau)|d\tau \leq \int_{t_0}^{t} m\,d\tau = m(t-t_0) \tag{20.7}$$

Аналогичное рассуждение для $t \leq t_0$ завершает доказательство:

$$|x(t)-x_0| \leq \left|\int_{t}^{t_0} a(x,\tau)\right| \leq \int_{t}^{t_0} |a(x,\tau)|d\tau \leq \int_{t}^{t_0} m\,d\tau = m(t_0-t) \tag{20.8}$$

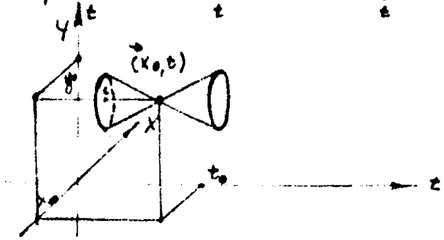


Рис.2 Конус, внутри которого расположено решение

С. Непрерывность правых частей

Рассмотрим цилиндрическую окрестность V начальной точки x_0, t_0 : $\quad |x-x_0| \leq \rho \ ; \ |t-t_0| \leq \delta$

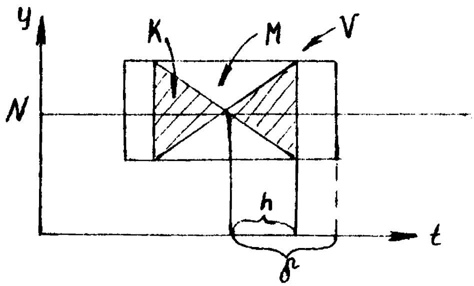
целиком лежащую в области непрерывности правой части $a(x,t)$ Т.к. непрерывная векторная функция ограничена по норме, то существует число m, например,

$$m = \max_{V} |a(x,t)| \tag{20.9}$$

обеспечивающее оценку (20.5) для функции a

$$|a(x,t)| \leq m \tag{20.10}$$

На основании леммы B можно построить конус К



Для трехмерной картины надо прямоугольник V вращать вокруг прямой MN. Конус К получается в результате вращения заштрихованных треугольников. В "п"-мерном случае картина аналогична.

Пересечение этого конуса с окрестностью V определяет интервал времени h,

$$h = \min\left\{\delta, \frac{\rho}{m}\right\} \tag{20.11}$$

в течение которого,

$$t_0 - h \leq t \leq t_0 + h \tag{20.12}$$

можно гарантировать, что решение, если оно существует, не покинет замкнутой области V (и даже К), где правая часть $a(x,t)$ определена и непрерывна.

Вопрос. Почему t задается сложной функцией?

Д. Условие Липшица. Оценка сходимости метода Пикара

Говорят, что функция $a(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица, если существует константа Липшица L такая, что

$$|a(x,t)-a(y,t)| < L|x-y| \qquad (20.13)$$

для любой пары точек, принадлежащих области V.

Это требование является ослаблением (Доказать! Что надо использовать ?) требования существования ограниченной части производной (квадратичной матрицы) $\frac{\partial a}{\partial x}$. Оно обеспечивает простую оценку сходимости метода Пикара.

Пусть в самом деле

$$X_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} a(x_n, \tau)\,d\tau \qquad (20.14)$$

Совершенно аналогично доказательству леммы В можно показать, что любая кривая $x_n(t)$ целиком лежит в конусе К, если лежит внутри интервала, найденного в предыдущем пункте.

Вопрос. Что следует взять за начальный пункт доказательства по индукции ?

Оценим разность

$$X_{n+1}(t) - X_n(t) = \int_{t_0}^{t} [a(x_n, \tau) - a(x_{n-1}, \tau)]\,d\tau \qquad (20.15)$$

применяя неравенства Липшица

$$\left|x_{n+1}(t)-x_n(t)\right| \leqslant \int_{t_0}^{t}\left|a(x_n,\tau)-a(x_{n-1},\tau)\right|d\tau \leqslant \int_{t_0}^{t} L\,|x_n - x_{n-1}|\,d\tau \tag{20.16}$$

Эта оценка, также как и все дальнейшие, проведена для значений t лежащих левее , надо переставить пределы интегрирования. Вводя обозначение

$$\Delta_{n+1}(t) = |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \tag{20.17}$$

получаем цепочку неравенств для неотрицательных числовых функций Δ, t

$$\Delta_{n+1}(t) \leqslant L\int_{t_0}^{t}\Delta_n(\tau)\,d\tau \tag{20.18}$$

Как всегда при индуктивном построении, начальный шаг требует независимого рассмотрения. Полагая $n=0$, имеем из (20.19)

$$\Delta_1(t) \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} a(x_0,\tau)\,d\tau\right| \leqslant \int_{t_0}^{t}|a(x,\tau)|\,d\tau \leqslant \int_{t_0}^{t} n\,d\tau = m\,(t-t_0)$$

Подставляя эту оценку в (20.18), получаем:

$$\Delta_2(t) \leqslant mL\,\frac{(t-t_0)^2}{2} \tag{20.20}$$

Далее

$$\Delta_3(t) \leqslant mL^2\,\frac{(t-t_0)^3}{2\cdot 3} \tag{20.21}$$

и нетрудно указать общий вид оценки:

$$\Delta_n(t) \leqslant mL^{n-1}\,\frac{(t-t_0)^n}{n!} \tag{20.22}$$

Предположим теперь, что эта оценка верна для всех n, не превосходящих некоторого, и докажем ее справедливость для n+I. Из (20.18) имеем:

$$\Delta_{n+1}(t) \leqslant L\int_{t_0}^{t}\Delta_n(\tau)\,d\tau = mL^n\,\frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}(t-t_0)^n\,d\tau = mL^n\,\frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{20.23}$$

И, следовательно, оценка (20.22) доказана для любого $n>1$, так как при n=I ее справедливость доказана независимо.

Аналогичное доказательство при $t \leq t_0$ приводит к оценке

$$\Delta_n(t) \leq m L^{n-1} \frac{|t-t_0|^n}{n!} \tag{20.24}$$

которая верна уже при любых t на отрезке

$$t_0-h \leq t \leq t_0+h \tag{20.25}$$

<u>Вопрос</u>. Где использовано неравенство (20.25) при доказательстве оценки (20.24) ?

Т.к. правая часть (20.24) достигает максимума в правом конце, то окончательно доказано сл. неравенство

$$\left| x_{n+1}(t) - x_n(t) \right| \leq m L^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \tag{20.26}$$

справедливое при всех t на отрезке $(t_0-h\,,\ t_0+h)$.

Е. <u>Теорема существования решения интегрального уравнения</u>

Если в замкнутой области V

$$|x-x_0|<\rho\,; \qquad |t-t_0|<\delta \tag{20.27}$$

вектор-функция $a(x,t)$

I. Непрерывна по совокупности аргументов (x, t) и, следовательно, ограничена,

$$|a(x,t)| \leq m\,, \tag{20.28}$$

2. удовлетворяет условию Липшица по векторному аргументу

$$|a(x,t)-a(y,t)| \leq L\,|x-y| \qquad (20.29)$$

то существует векторная функция скалярного аргумента $x(t)$, заданная на отрезке

$$t_0-h \leq t \leq t_0+h\,, \qquad (20.30)$$

где

$$h = \min\left(\delta, \frac{\rho}{m}\right), \qquad (20.31)$$

и удовлетворяющая на этом отрезке интегральному уравнению

$$x(t)= x_0+\int_{t_0}^{t} a(x,\tau)d\tau \qquad (20.32)$$

<u>Доказательство</u>

Рассмотрим последовательность вектор-функции

$$\begin{cases} x_0(t)=x_0 \\ x_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} a(x_0,\tau)d\tau \\ \cdots\cdots \\ x_{n+1}(t)= x_0+\int_{t_0}^{t} a(x_n,\tau)d\tau \end{cases} \qquad (20.33)$$

Заданных на отрезке $|t-t_0| \leq h$ и сопоставим этой последовательности ряд

$$x_0(t)+y_1(t)+y_2(t)+\cdots+y_n(t)+\cdots \qquad (20.34)$$

для которого последовательность является последовательностью частных сумм:

$$\begin{cases} y_0(t) = y_0(t) \\ y_1(t) = x_1(t) - x_0(t) \\ \dots \\ y_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t) \\ \dots \end{cases} \qquad (20.35)$$

Следовательно

$$x_n(t) = y_0(t) + y_1(t) + \dots + y_n(t) \qquad (20.36)$$

Ряд (20.34) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $|t-t_0| \leq h$

ибо его члены не превосходят по норме членов сходящегося числового ряда с положительными коэффициентами

$$|x_0| + mh + mL\frac{h^2}{2!} + \dots + mL^n\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} + \dots = |x| + \frac{m}{L}(e^{Lh}-1) \qquad (20.37)$$

Поэтому последовательность частных сумм ряда (20.34) равномерно сходится к непрерывной вектор-функции $x(t)$

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) \qquad (20.38)$$

т.к. члены последовательности являются непрерывными функциями t. Следовательно, последовательность вектор-функции $a(x_n(t),t)$ равномерно сходится к функции $a(x(t),t)$

$$\lim_{n\to\infty} a(x_n(t),t) = a(x(t),t) \qquad (20.39)$$

т.к. функция $a(x,t)$ непрерывна и, значит, равномерное непрерывна в области V по совокупности аргументов (x,t)

По теореме о предельном переходе под знаком интеграла получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} a(x_n,\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} a(x,\tau)d\tau \qquad (20.40)$$

Итак, доказано, что предел левой и правой части равенства (20.I4) существуют. Следовательно, эти пределы равны, и окончательно получается

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(x,\tau)\,d\tau \tag{20.4I}$$

Что и завершает доказательство теоремы.

Задача. Сформулировать все теоремы анализа, использованные в доказательстве теоремы.

п^0 Теорема единственности. п^0 2I

Однако не следует думать, что теорема Пикара хуже теоремы Эйлера. Более сильные требования позволяют доказать и более сильные утверждения.

Главное дополнение - единственность решения, которая в Эйлеровских предположениях не имеет место (точнее может не иметь места, как показывает пример п^{0}I0).

Теорема единственности

Пусть функция $x(t)$ на отрезке $t' \leq t \leq t''$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(x,\tau)\,d\tau \tag{2I.2}$$

а кривая (x,t) в n+ I пространстве целиком лежит в замкнутой области G, для любых двух точек которой выполнено условие Липшица (2I.I), с константой, зависящей только от G, $L = L(G)$.

Пусть функция $y(t)$ на том же отрезке $t' \leqslant t \leqslant t''$ удовлетворяет тому же интегральному уравнению

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(y,\tau)\, d\tau \tag{21.3}$$

Тогда функция $y(t)$ тождественно совпадает с функцией на всем отрезке $t' \leqslant t \leqslant t''$

$$y(t) \equiv x(t) \tag{21.4}$$

Доказательство

Первый шаг. Докажем сначала утверждение на меньшем отрезке, в качестве которого возьмем отрезок длины $\frac{1}{L}$ с центром в t_0

$$\frac{1}{2L} \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{1}{2L} \tag{21.5}$$

и обозначим через m норму максимального отклонения от

$$m = \max_{t < \Delta_0} |y(t) - x(t)| \tag{21.6}$$

Мы докажем, что $m=0$ и, следовательно, $y(t)$ совпадает с $x(t)$
Для доказательства напишем уравнение для разности

$$y(t) - x(t) = \int_{t_0}^{t} [a(y,\tau) - a(x,\tau)]\, d\tau \tag{21.7}$$

и оценим ее по норме, применяя условие Липшица,

$$|y(t) - x(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} |a(y,\tau) - a(x,\tau)|\, d\tau \leqslant \int_{t_0}^{t} L\, |y(\tau) - x(\tau)|\, d\tau \tag{21.8}$$

причем оценка, как всегда, проводится сначало для $t \geqslant t_0$.

Наша задача получить из этого неравенства такую оценку для , из которой вытекало бы, что может быть только нулем. Мы заменим норму разности ее максимумом, но начинать замену нужно обязательно справа:

$$|y(t)-x(t)| \leq \int_{t_0}^{t} L\, m\, d\tau = L(t-t_0)m \tag{21.9}$$

Полученное неравенство будет справедливо и слева от t_0 если поставить знак модуля:

$$|y(t)-x(t)| \leq L|t-t_0|m \leq \frac{1}{2}m \tag{21.10}$$

Последнее неравенство написано на том основании, что рассмотрение ведется на отрезке Δ_0, для которого $|t-t_0| \leq \frac{1}{2L}$. Но если любое значение левой части удовлетворяет полученному неравенству, то и максимум удовлетворяет тому же неравенству:

$$\max|y(t)-x(t)| \leq \frac{1}{2}m \tag{21.11}$$

Т.к., левая часть равенства есть как раз m, то мы получаем неравенство для

$$m \leq \frac{1}{2}m \tag{21.12}$$

Из которого вытекает, что

$$m \leq 0 \tag{21.13}$$

Но число m по определению отрицательным быть не может

$$m \geq 0 \tag{21.14}$$

остается, поэтому, единственная возможность

$$m = 0$$

Замечание: Отрезок Δ_0 можно взять побольше. Единственное, что было использовано, это неравенство

$$L\,|t-t_0| < q < 1 \qquad (21.15)$$

на всем отрезке Δ_0 . Но что q равно именно половине - несущественно. Однако очень существенно, что q меньше единицы, иначе не получится неравенство (21.12). Поэтому слишком большой отрезок Δ_0 брать нельзя, неравенство (21.8) на нем слишком слабое.

Второй шаг.

Разобьем теперь весь отрезок $t' \leq t \leq t''$ на отрезки длины $\frac{1}{2L}$ и обозначим их концы $t_0, t_1, \dots, t_n, t''$. Интервалы, идущие налево, нумеруются аналогично: $t_0, t_{-1}, \dots, t_{-e}, t'$

Предположим (по функции), что на отрезке (t_0, t_k) тождество

$$y(t) \equiv x(t) \qquad (21.16)$$

уже доказано. В частности доказано, что

$$y(t_k) = x(t_k) = x_0 + \int_{t_0}^{t_k} a(y,\tau)\,d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t_k} a(x,\tau)\,d\tau \qquad (21.17)$$

используя эти равенства, интегральные уравнения можно переписать, перенося начало отсчета времени в точку t_k :

$$y(t) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t} a(y,\tau)\,d\tau \qquad (21.18)$$

$$x(t) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t} a(x,\tau)\,d\tau$$

Рассуждение, в точности аналогичное приведенному на первом шаге, показывает, что тождество

$$y(t) \equiv x(t) \tag{21.19}$$

остается справедливым и на интервале t_k, t_{k+1}.

Теорема доказана.

Следует отметить две особенности теоремы единственности.

I. В доказательстве использовано только условие Липшица. Непрерывность по t и тем более по совокупности аргументов (x, t) не требуется.

2. Теорема доказана в целом. Любой отрезок решения, лежащий в области G, где выполнено условие Липшица, является единственным, проходящим через любую свою точку

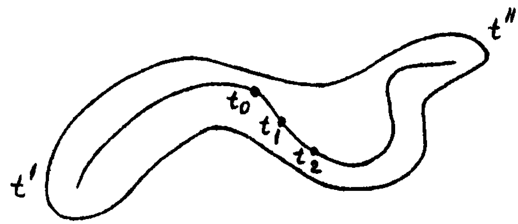


Рис. I Область единственности.

Решение может перестать быть единственным только в точках, где не существует или обращается в бесконечность производная

$$A = \frac{\partial a}{\partial x}$$

Любая область, где норма A ограничена, является областью единственности.

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛАВЕ III

А. ИНТЕГРАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО, МАЖОРАНТА

Теорема единственности основана на оценке интеграла и вывода из этой оценки неравенства для изучаемой величины.

Для дальнейшего необходима более общая интегральная оценка.

Теорема о мажоранте

Пусть скалярная функция $u(t)$ удовлетворяет неравенству

$$u(t) \leq \int_{t_0}^{t} [P(\tau)u(\tau) + q(\tau)]\,d\tau \qquad (А.1)$$

на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$, на котором функция $P(\tau)$ ограничена и неотрицательна

$$0 \leq P(\tau) \leq P_0 \qquad (А.2)$$

Определим функцию $m(t)$, заменив знак неравенства знаком равенства

$$m(t) = \int_{t_0}^{t} [P(\tau)m(\tau) + q(\tau)]\,d\tau \qquad (А.3)$$

Полученная функция $m(t)$ является мажорантной для исходной функции $u(t)$

$$u(t) \leq m(t) \qquad (А.4)$$

Доказательство:

Будем решать уравнение для мажоранты методом Пикара

$$m_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} [P m_n + q]\,d\tau, \qquad (А.5)$$

выбрав функцию $u(t)$ в качестве нулевого приближения

$$m_0(t) = u(t) \qquad (А.6)$$

Теорема будет доказана, если установить монотонность последовательности $m_n(t)$.

I шаг (начало индукции)

Неравенство $m_1(t) \geqslant m_0(t)$ вытекает прямо из выбора нулевого приближения. Действительно

$$m_1(t) = \int_{t_0}^{t} (p m_0 + q)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} (p u + q)\, d\tau \geqslant u(t) = m_0(t) \qquad (А.7)$$

2 шаг (индукция)

Предположим, что неравенство $m_k(t) \geqslant m_{k-1}(t)$ (А.8)

уже доказано. Тогда из свойств интегралов и неотрицательности p имеем:

$$m_{k+1}(t) = \int_{t_0}^{t} (p m_k + q)\, d\tau \geqslant \int_{t_0}^{t} (p m_{k-1} + q)\, d\tau = m_k(t) \qquad (А.9)$$

Таким образом, $m_k(t)$ образует монотонно неубывающую последовательность. (Привести пример, когда эта последовательность в самом деле не является возрастающей), сходящуюся на основании теоремы существовании к решению уравнения (А.5) – функция

Следовательно, $n(t) \leq m(t)$ (А.10)

и теорема доказана.

Нужно подчеркнуть, что полученная оценка приобретает эффективность только на основании теоремы единственности. Если теорема единственности не доказана, то мы знаем только, что функция $u(t)$ меньше какого-то из решений интегрального уравнения (A.5), а какого именно-не знаем.

Поэтому, общая мажорантная оценка хотя и содержит теорему единственности как частный случай при $q \equiv 0$, но доказывается при существенном использовании этого независимо доказываемого частного случая.

Следствие.

Если p и q постоянны, то

$$m(t) = \frac{q}{p}\left[e^{p(t-t_0)} - 1\right] \qquad (A.11)$$

В частности, если $q = 0$, то $m(t) \equiv 0$ (A.12)

Задача. Доказать, что теорема единственности вытекает из оценки (A.11).

B. УРАВНЕНИЯ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА, НЕПРЕРЫВНОСТЬ РЕШЕНИЯ, КАК ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА

В приложениях чаще всего встречаются ситуации, когда изучаемая система принадлежит однотипному классу систем, отличающихся значениями параметров. Например, переменная емкость в радиоустройствах или рули управления в механических системах. Математически это описывается дифференциальным уравнением, правая часть которого есть непрерывная вектор-функция не только векторного аргумента x, но еще и параметра α (вообще говоря, также векторного)

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t, \alpha) \qquad (B.1)$$

Теорема о непрерывной зависимости от параметра.

Пусть правая часть уравнения (В.1)

1. Непрерывно-дифференцируемая по аргументу x в некоторой замкнутой области своих аргументов (x , t , α).

2. Непрерывна по совокупности аргументов (x , t , α).

Тогда, решение $x = f(\xi, t, \alpha)$ (В.2)

при фиксированных начальных данных

$$f(\xi, t_0, \alpha) \equiv \xi \qquad (В.3)$$

есть непрерывная функция α .

Доказательство.

Рассмотрим два решения эквивалентного интегрального уравнения, соответствующие разным значениям параметра

$$\left.\begin{aligned} x(t,\alpha) &= \xi + \int_{t_0}^{t} a(x,\tau,\alpha)\,d\tau \\ y(t,\beta) &= \xi + \int_{t_0}^{t} a(y,\tau,\beta)\,d\tau \end{aligned}\right\} \qquad (В.4)$$

и составим разность

$$y(t,\beta) - x(t,\alpha) = \int_{t_0}^{t} [a(y,\tau,\beta) - a(x,\tau,\alpha)]\,d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \{[a(y,\tau,\beta) - a(x,\tau,\beta)] + [a(x,\tau,\beta) - a(x,\tau,\alpha)]\}\,d\tau \qquad (В.5)$$

Оценим теперь эту разность по норме, применив к первой скобке под знаком интеграла лемму Адамара и неравенство (Липшица)

$$|y-x| \leq \int_{t_0}^{t} \{|y-x| + M|\beta-\alpha|\}\,d\tau \qquad (В.6)$$

Оценка второго члена

$$|a(x,\tau,\beta)-a(x,\tau,\alpha)|<M|\beta-\alpha| \tag{B.7}$$

Является следствием условия Липшица по параметру α.

Если же функция a только непрерывна по параметру α, то оценка (23.7) должна быть заменена более общей

$$|a(x,\tau,\beta)-a(x,\tau,\alpha)|<\delta(|\beta-\alpha|) \tag{B.8}$$

где функция $\delta(\varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Это неравенство вытекает просто из равномерной непрерывности функции в замкнутой области.

В этом случае неравенство (B.6) надо заменить более общим,

$$|y-x|\leq\int_{t_0}^{t}[L|y-x|+\delta]\,d\tau \tag{B.9}$$

откуда, на соновании теоремы о мажоранте вытекает

$$|y-x|\leq\frac{1}{L}\left(e^{L(t-t_0)}-1\right)\cdot\delta(|\beta-\alpha|) \tag{B.10}$$

Полученная оценка доказывает равномерную сходимость решения по параметру α.

ГЛАВА IV. ОКРЕСТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОЙ ТОЧКИ. АВТОНОМНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ.

22 . Автономные системы вблизи стационарной точки

Регулярные точки любых систем устроены одинаково. Движение в малой окрестности таких точек мало отличается от равномерного прямолинейного движения по параллельным прямым.

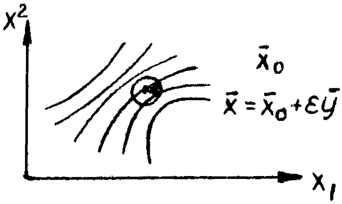


Рис.I. Окрестность регулярной точки

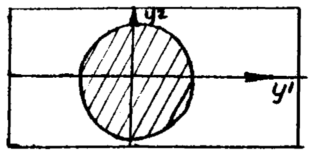


Рис.2. Окрестность регулярной точки под большим увеличением

Наиболее ясно это видно, если окрестность точки x_0 "рассмотреть в микроскоп с большим увеличением". Роль такого микроскопа в математике играет замена переменных, содержащая малый параметр ε ,

$$x = x_0 + \varepsilon y \tag{22.I}$$

при которой ε - окрестность точки в пространстве x увеличивается до размера единицы в пространстве y .

Подставляя это выражение в уравнение для x получаем

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = a(x_0 + \varepsilon y, t) \tag{22.2}$$

Если правая часть отлична от нуля, то нужно изменить также и масштаб времени,

$$t = t_0 + \varepsilon\tau \tag{22.3}$$

что соответствует "ускоренной киносъемке".

В новых переменных система имеет вид

$$\frac{dy}{d\tau} = a(x_0 + \varepsilon y,\ t + \varepsilon\tau) \tag{22.4}$$

допускающий предельный переход к бесконечно большому увеличению $(\varepsilon \to 0)$,

$$\frac{dy}{d\tau} = a(x_0, t_0) \tag{22.5}$$

и решение имеет вид

$$y = y_0 + a_0\tau \tag{22.6}$$

Отсюда вытекает важная роль равномерного прямолинейного движения. Оказывается, что именно так устроено движение вблизи любой регулярной точки.

Однако, движение автономной системы

$$\frac{dx}{dt} = a(x) \tag{22.7}$$

вблизи ее стационарной точки ,

$$a(x_0) = 0 \tag{22.8}$$

устроено существенно сложнее. Производя замену переменных

$$x = x_0 + \varepsilon y \tag{22.9}$$

и разлагая правую часть в ряд по степеням, имеем

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = a(x_0) + \varepsilon\left(\frac{da}{dx}\right)y + \varepsilon^2\frac{d^2a}{dx^2}(y,y) + \tag{22.10}$$

Так как главный член обращается в нуль, то на можно сократить

$$\frac{dy}{dt} = Ay + O(\varepsilon) \tag{22.11}$$

и предельный переход приводит к линейной системе

$$\frac{dy}{dt} = Ay \tag{22.12}$$

которую полезно записать и в координатной форме тоже:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy^1}{dt} &= A_1^1 y^1 + A_2^1 y^2 + \cdots + A_n^1 y^n \\ \frac{dy^2}{dt} &= A_1^2 y^1 + A_2^2 y^2 + \cdots + A_n^2 y^n \\ &\cdots \\ \frac{dy^n}{dt} &= A_1^n y^1 + A_2^n y^2 + \cdots + A_n^n y^n \end{aligned}\right\} \tag{22.13}$$

Таким образом, исследование окрестностей стационарной точки любой автономной системы сводится к изучению линейной автономной системы.

Строго говоря, проведенные рассуждения показывают только, что начало следует с линейных автономных систем. Однако после того, как теория таких систем будет построена, станет ясно, (на основании теории устойчивости), что большинотво интересных вопросов о любых автономных системах имеют ответ в рамках теории линейных автономных систем.

23 Линейные автономные системы на плоскости

Предварительное, разведывательное изучение проблем полезно провести для систем на плоскости

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x + \beta y \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma x_0 + \delta y \end{aligned}\right\} \tag{23.1}$$

которые относятся к одному из случаев интегрируемости, а именно к случаю однородных уравнений. Согласно методу, разобранному в §15, надо написать одно геометрическое уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma x + \delta y}{\alpha x + \beta y} \tag{23.2}$$

и ввести новое переменное k,

$$k = \frac{y}{x} \tag{23.3}$$

после чего переменные разделятся:

$$x\frac{dk}{dx} = -\frac{\beta k^2 + (\alpha - \delta)k - \gamma}{\beta k + \alpha} \tag{23.4}$$

Интегрирование полученного уравнения дает первый интеграл системы (I)

$$\ln|x| + \int \frac{\beta k + \alpha}{\beta k^2 + (\alpha - \delta)k - \gamma}\, dk = const \tag{23.5}$$

но выраженный через k и x. Для того, чтобы привести его к обычной форме - функции от x и y, надо выполнить квадратуру и подставить затем вместо k его выражения через x и y.

Вычисление интеграла

Из анализа известно, что интегрирование рациональной функции требует ее разложения на элементарные дроби, структура которых определяется корнями знаменателя

$$\beta k^2 + (\alpha - \delta)k - \gamma = 0 \tag{23.6}$$

Квадратное уравнение имеет два (действительных и комплексных) корня.

Поэтому, знаменатель можно представить в виде

$$\beta k^2 + (\alpha - \delta)k - \gamma = \beta(k-k_1)(k-k_2) \tag{23.7}$$

а подинтегральное выражение представить в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{\beta k + \alpha}{\beta k^2 + (\alpha-\delta)k - \gamma} = \frac{A_1}{k-k_1} + \frac{A_2}{k-k_2} \tag{23.8}$$

Умножая на знаменатель, получаем

$$\beta k + \alpha = \beta A_1 (k-k_2) + \beta A_2 (k-k_1) \tag{23.9}$$

откуда коэффициент A_1 находится, если положить k равным k_1,

$$A_1 = \frac{\beta k_1 + \alpha}{\beta(k_1-k_2)} \tag{23.10}$$

Аналогично находим A_2, полагая $k = k_2$

$$A_2 = -\frac{\beta k_2 + \alpha}{\beta(k_1-k_2)} \tag{23.11}$$

Подставляя найденные разложения на элементарные дроби, получаем

$$\int \frac{\beta k + \alpha}{\beta k^2 (\alpha-\delta)k - \gamma} dk = A_1 \ln|k-k_1| + A_2 \ln|k-k_2| \tag{23.12}$$

Возвращаясь к вычислению первого интеграла, заметим, что сумма коэффициентов равна единице

$$A_1 + A_2 = 1 \tag{23.13}$$

Поэтому первый интеграл можно записать в форме

$$(A_1 + A_2)\ln|x| + A_1 \ln|k-k_1| + A_2 \ln|k-k_2| = const \tag{23.14}$$

откуда можно исключить k на основании равенства,

$$y = kx \tag{23.15}$$

приведя первый интеграл к виду

$$A_1 \ln|y-k_1x| + A_2 \ln|y-k_2x| = const \tag{23.16}$$

Однако и эта форма не является окончательной. Умножая обе части равенства на общии знаменатель коэффициентов A_1 и A_2 и вводя величину λ по формуле

$$\lambda = \alpha + \beta k \tag{23.17}$$

получаем

$$\lambda_1 \ln|y-k_1x| - \lambda_2 \ln|y-k_2x| = const \tag{23.18}$$

после чего потенциирование дает окончательную форму первого интеграла

$$\frac{|y-k_1x|^{\lambda_1}}{|y-k_2x|^{\lambda_2}} = C \tag{23.19}$$

Замечание: Форма 18 первого интеграла имеет особенность на двух прямых

$$y = k_1x \quad \text{и} \quad y = k_2x$$

Форма 19 обращается в бесконечность только на второй из этих прямых.

Задача 1. Найти такую форму первого интеграла, которая не имеет особенности на второй прямой.

Задача 2. Найти вид первого интеграла, имеющий особенность только в точке пересечения прямых, т.е. в начале координат.

Указание. Произвольная функция от первого интеграла также является первым интегралом.

Смысл параметров первого интеграла. Случай действительных корней.

Проведенные выкладки имеют смысл в случае, если корни квадратного уравнения 6 действительны. Для этого нужно, чтобы дискриминант Δ

$$\Delta = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma \tag{23.20}$$

квадратного уравнения был положителен.

Сами корни допускают простое геометрическое истолкование. Они являются стационарными точками уравнения (4) и, следовательно, прямолинейными решениями

$$y = kx \tag{23.21}$$

уравнения (2), определяющего геометрию системы. Эти решения можно найти прямо из уравнения (2) подставляя туда kx вместо y. Получается уравнение для k,

$$k = \frac{\gamma + \delta k}{\alpha + \beta k} \tag{23.22}$$

отличающееся от уравнения (6) только формой записи. Столь же простое, но уже не геометрическое, а кинетическое истолкование допускает показатели λ. На прямолинейном решении можно исключить У (поставив вместо него kx) из первого уравнения исходной системы. Получится уравнение, определяющее кинетику прямолинейного эшения,

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \tag{23.23}$$

где кинетический коэффициент λ выражается через геометрический коэффициент k по известной уже формуле

$$\lambda = \alpha + \beta k \tag{23.24}$$

Знак λ определяет направление движения; если λ положительно, точка (X,Y) на прямолинейном решении будет с течением времени удаляться от особой точки. Отрицательное λ соответствует приближению к особой точке.

<u>Фазовый портрет системы</u>

Для исследования удобно ввести косоугольную систему координат, выбирая особые решения в качестве координатных осей

$$\xi = y - k_1 x \qquad \eta = y - k_2 x \tag{23.25}$$

В этой системе координат особенно просто записывается первый интеграл

$$\eta = C\,\xi^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \tag{23.26}$$

и структура семейства интегральных кривых определяется, как известно из анализа, показателем

$$n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{23.27}$$

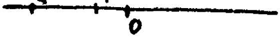
Условимся всегда обозначать через λ_1, меньшее (по абсолютной величине) из чисел λ, тогда

$$-1 \le n \le 1 \tag{23.28}$$

Всего возможно 4 случая в зависимости от знаков λ_1 и λ_2

$0 < n < 1$ "параболы"

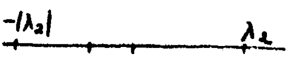
I $\quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2$



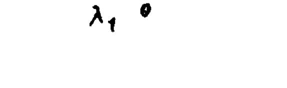
II $\quad \lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$-1 \le n < 0$ "гиперболы"

III $\quad \lambda_2 < 0 < \lambda_1 < |\lambda_2|$



IV $\quad -|\lambda_2| < \lambda_1 < 0 < \lambda_2$



В первых двух случаях оба показателя одного знака

$$\lambda_1 \ \lambda_2 > 0 \tag{23.29}$$

все интегральные кривые имеют в особой точке общую касательную -первое особое решение. Исключение составляет второе прямолинейное решение, пересекающееся с первым под углом. Особая точка называется "узловой". В зависимости от направления движения различают "устойчивый узел" и "не устойчивый узел"

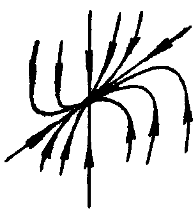


Рис.3. Устойчивый узел "Сток"

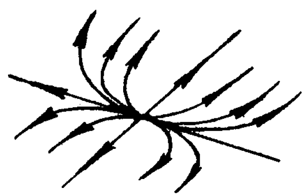


Рис.4 Неустойчивый узел "Источник"

Если показатели λ_1 и λ_2 имеют разные знаки,

$$\lambda_1 \lambda_2 < 0 \tag{23.30}$$

то особые решения являются асимптотами для всех остальных интегральных кривых. Движение в целом напоминает два встречных потока, разбивающихся друг о друга. Набегающие потоки движутся вдоль особого решения, соответствующего отрицательному λ . Уходяшее решение с $\lambda > 0$ дает направление расходящихся потоков.

Особая точка называется "седлом".

Рис. 5 Седловая точка

Прямолинейные решения, проходящие через начало координат, часто называют сепаратриссами (от *separo* — отделяю), так как они разделяют поток интегральных кривых на части, разбегающиеся в разные стороны.

Заметим, в заключение, что остались неисследованными случаи кратных корней $\lambda_1 = \lambda_2$ и случай, когда один из корней нулевой $\lambda = 0$. Эти случаи не укладываются в общую классификацию.

Вопрос. Где именно не проходит общее рассмотрение для случая нулевого корня? Для кратных корней?

Фазовый портрет для случая комплексных корней

Строго говоря, случай комплексных корней требует с самого начала самостоятельного рассмотрения. Однако, в эвристическом рассуждении допустимо, с последующей проверкой, применение метода "аналитического продолжения", когда формулу, выведенную при некоторых ограничениях, используют затем без ограничений. Точное обоснование такой прием получает только в теории функций комплексного переменного.

Применим этот прием, подставляя комплексные значения,

$$k_1 = \bar{k}_2 = k + il \qquad \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = p + i\omega \tag{23.31}$$

в соотношение

$$\lambda_1 \ln (y - k_1 x) - \lambda_2 \ln (y - k_2 x) = const \tag{23.32}$$

выведенное для случая действительных корней.

Замечание: Такая форма первого интеграла в действительном случае имеет смысл только внутри угла, задаваемого неравенствами

$$y - k_1 x > 0 \qquad y - k_2 x > 0$$

Однако, более правильная (в действительном случае) форма I8 содержащая символ абсолютной величины под знаком логарифма, в комплексном случае приводит к неверному результату (Почему?). Логарифм комплексного числа определяется формулой

$$\ln (u + iv) = \ln \sqrt{u^2 + v^2} + i \,\mathrm{arctg}\, \frac{v}{u} \tag{23.33}$$

Переходя в косоугольную систему координат u, v

$$\left.\begin{aligned} u &= y - kx \\ v &= lx \end{aligned}\right\} \tag{23.34}$$

перепишем соотношение 33 в виде

$$(p+i\omega)\left[\ln\sqrt{u^2+v^2} + i\,\mathrm{arctg}\,\frac{v}{u}\right] - (p-i\omega)\left[\ln\sqrt{u^2+v^2} - i\,\mathrm{arctg}\,\frac{v}{u}\right] = const \tag{23.35}$$

которое после приведения подобных и сокращения на i оказывается действительным

$$\omega \ln\sqrt{u^2+v^2} + p \operatorname{arctg}\frac{v}{u} = const \tag{23.36}$$

и дает форму первого интеграла

$$\omega \ln\sqrt{(y-kx)^2+l^2x^2} + p \operatorname{arctg}\frac{lx}{y-kx} = const \tag{23.37}$$

для случая комплексных корней.

Эту форму первого интеграла мы получили " незаконно" и ее нужно проверить прямым дифференциированием, либо вывести из формулы 5.

Введем в плоскости (X,У) обобщенную полярную систему координат, полагая

$$\left.\begin{aligned} u &= r\cos\varphi \\ v &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{23.38}$$

В этих координатах интегральные кривые оказываются системой логарифмических спиралей

$$\omega \ln r + p\varphi = const. \tag{23.39}$$

Поэтому и в плоскости (X,У) интегральные кривые являются спиралями, только подвергнутыми аффинному преобразованию 34. В зависимости от соотношения знаков p и ω спирали будут закручивающимися либо по часовой стрелке, либо против. Знак φ определяет направление движения точки по спирали. Точки такого вида называются "фокусом". Из предыдущего видно, что имеется четыре сорта фокусов- устойчивые и неустоичивые, право и левовращающие.

Важную роль имеет частный случай фокуса- центр, соответствующий чисто мнимым значениям $\lambda = i\omega$. Ниже приведена типичная картина превращения неустойчивого фокуса в устойчивый при изменении знака p

Рис.6 Неустойчивый фокус

Рис.7 Центр

Рис.8 Устойчивый фокус.

Из центра сколь угодно малым изменением параметров можно получить как устойчивый, так и неустойчивый фокус. Однако направление вращения сохраняется. Поэтому можно получить еще три рисунка, аналогичные приведенной серии, изменив всюду вращение на противоположное.

25. РАЗЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ РЕШЕНИЯМ. СЛУЧАЙ РАЗЛИЧНЫХ КОРНЕЙ.

Изучение окружности стационарной точки приводится, как мы видели, к исследованию системы линейных уравнений с постоянными действительными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{25.1}$$

или более подробно,

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= A_1^1 x^1 + A_2^1 x^2 + \dots + A_n^1 x^n \\ \frac{dx^2}{dt} &= A_1^2 x^1 + A_2^2 x^2 + \dots + A_n^2 x^n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx^n}{dt} &= A_1^n x^1 + A_2^n x^2 + \dots + A_n^n x^n \end{aligned} \tag{25.2}$$

Часто употребителен также эйнштейновский (тензорный) способ записи,

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = A_\beta^\alpha x^\beta, \tag{25.3}$$

когда подразумевается суммирование по индексу (в нашем случае β), входящему дважды (обязательно вверху и внизу).

Важную роль в исследовании автономных линейных систем играет понятие инвариантного луча системы. Так называют решение вида,

$$x^\alpha(t) = \varphi(t)\xi^\alpha \tag{25.4}$$

геометрический смысл которого состоит в том, что конец вектора $\bar{x}$ при всех t расположен на прямой, соединяющей начало координат с вектором $\bar{\xi} = \{\xi^\alpha\}$.

Найдем условия, при которых система (3) имеет инвариантный луч. Подставляя (4) в (3), имеем:

$$\frac{d\varphi}{dt}\xi^\alpha = \varphi(t) A^\alpha_\beta \xi^\beta \tag{25.5}$$

Разделим обе части всех уравнений (5) на $\varphi(t)$ и, обозначив

$$\lambda = \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt}, \tag{25.6}$$

соберем все члены в одной части

$$A^\alpha_\beta \xi^\beta - \lambda\xi^\alpha = 0 \tag{25.7}$$

Обозначая символом Кропекара δ^α_β единичную матрицу E,

$$\delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}, \tag{25.8}$$

получаем систему в виде:

$$\left(A^\alpha_\beta - \lambda\delta^\alpha_\beta\right)\xi^\beta = 0 \tag{25.9}$$

Вид этой системы позволнет сделать сразу два существенных вывода.

Первый вывод состоит в том, что необходимым условием существования инвариантного луча является независимость λ от t

, так как все остальные величины, входящие в (9), от t не зависят. Это позволяет найти $\varphi(t)$ из соотношения (6):

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \tag{25.10}$$

Второй вывод состоит в том, что система (9) имеет отличное от нуля решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю

$$\det|A^{\alpha}_{\beta} - \lambda\delta^{\alpha}_{\beta}| = 0, \quad \begin{vmatrix} A^1_1 - \lambda & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 - \lambda & \dots & A^2_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n - \lambda \end{vmatrix} \tag{25.11}$$

Полученное соотношение содержит только λ и может рассматриваться как уравнение, определяющее λ. Это уравнение совпадает с характеристическим уравнением для собственных направлений матрицы A:

$$(A - \lambda E)\xi = 0 \tag{25.12}$$

По традиции, идущей от небесной механики, уравнение (II), являющееся многочленом " n " - степени относительно λ,

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{25.13}$$

называют часто "вековым" или "секулярным" уравнением. В линейной алгебре такое же уравнение называется "характеристическим" или уравнением для собственных чисел.

Проведенное рассуждение до сих пор было условным. Его смысл следующий. Если инвариантный луч системы существует, то временной множитель $\varphi(t)$ обязательно экспонента $e^{\lambda t}$, показатель экспоненты есть число матрицы системы, а вектор ξ является собственным вектором этой матрицы.

В частности получилось, что противоположный луч, получающийся заменой ξ на $-\xi$, также является инвариантным лучом. Поэтому часто говорят о собственном направлении систем.

Если уравнение (I3) имеет действительный корень, то система (9) имеет действительное решение, и система (3) имеет инвариантный луч.

<u>Теорема I.</u> Если вековое уравнение (I3) имеет ровно "n" различных действительных корней, то любое решение системы является линейной комбинацией собственных решений.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию собственных решений

$$x(t)=c_1 e^{\lambda_1 t}\xi_1+\cdots+c_n e^{\lambda_n t}\xi_n \tag{25.I4}$$

и докажем, что $x(t)$ есть решение. В самом деле, так как

$$A\xi_i=\lambda_i\xi_i \tag{25.I5}$$

то,

$$\frac{dx}{dt}=c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\xi_1+\cdots+c_n\lambda_n e^{\lambda_n t}\xi_n= \tag{25.I6}$$

$$=c_1 e^{\lambda_1 t}A\xi_1+\cdots+c_n e^{\lambda_n t}A\xi_n=A\left(c_1 e^{\lambda_1 t}\xi_1+\cdots+c_n e^{\lambda_n t}\xi_n\right)=Ax$$

Кроме того, надо доказать, что произвольное решение $x(t)$ можно представить в виде (14). Это рассуждение существенно опирается на две важные теоремы - теорему линейной алгебры о том, что любой вектор x_0 можно разложить по собственным векторам матрицы A

$$x_0 = c_1 \xi_1 + \cdots + c_n \xi_n \tag{25.17}$$

и теорему единственности решения, показанную в $n°21$.

Итак, пусть $y(t)$ - произвольное решение. Обозначим через x_0 его значение при $t=0$

$$x_0 = y(0) \tag{25.18}$$

Строим координаты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ так, чтобы выполнялось равенство (17).

Рассмотрим решение вида (14), построенное по найденным коэффициентам $c_1, \ldots, c_n$. Подставляя $t=0$, убеждаемся, что

$$x(0) = y(0) \tag{25.19}$$

откуда на основании теоремы единственности заключаем, что

$$y(t) \equiv x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \xi_n \tag{25.20}$$

Теорема полностью доказана.

Выход в комплексное пространство.

Прозрачную и законченную форму эта теорема, к сожалению, имеет только в случае действительных и реальных корней. Однако вековое уравнение не обязано, конечно, иметь все действительные корни. Более того, уже в случае систем на плоскости вековое уравнение может не иметь ни одного действительного корня.

Поэтому всюду в дальнейшем, при изучении автономных линейных систем используется прием "выхода в комплексное пространство". Прием этот состоит в следующем. Рассмотрим комплексное "n"-мерное пространство Z, с векторами

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \tag{25.21}$$

и рассмотрим в нем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz^1}{dt} &= A_1^1 z^1 + A_2^1 z^2 + \cdots A_n^1 z^n \\ \frac{dz^2}{dt} &= A_1^2 z^1 + A_2^2 z^2 + \cdots A_n^2 z^n \\ \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \frac{dz^n}{dt} &= A_1^n z^1 + A_2^n z^2 + \cdots + A_n^n z^n \end{aligned}\right\} \tag{25.22}$$

коэффициенты которой взяты из системы (2). Для таких комплексных систем можно доказать теоремы существования и единственности в полной аналогии с уже доказанными теоремами. Более того, отделяя в комплексной системе

$$\frac{dz}{dt} = Cz \tag{25.23}$$

действительные и мнимые части,

$$
\begin{aligned}
z &= u + iv \\
c &= A + iB
\end{aligned}
\qquad (25.24)
$$

получаем систему в действительном пространстве удвоенной размерности

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= Au - Bv \\
\frac{dv}{dt} &= Bu + Av
\end{aligned}
\qquad (25.25)
$$

точно эквивалентную комплексной, причем для новой системы теоремы существования и единственности уже доказаны.

Важно отметить, что для действительных систем,

$$B = 0 \qquad (25.26)$$

в комплексном пространстве решение остается тождественно действительным

$$V = 0 \qquad (25.27)$$

если начальные данные взяты действительными.

<u>Задача:</u> Доказать это утверждение, используя теорему единственности. Сформулировать и доказать более общее утверждение. Может ли решение пересекать действительное пространство ?

Теорема II. Пусть матрица C имеет n различных комплексных корней. Тогда любое решение системы (23) представимо в виде линейной комбинации

$$z(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\zeta_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t}\zeta_n \tag{25.28}$$

где $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n$ собственные векторы, а $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ соответствующие собственные числа матрицы C

$$C\zeta_i = \lambda_i \zeta_i \tag{25.29}$$

<u>Доказательство</u>: полностью совпадает с доказательством теоремы I, с той только разницей, что использует теорему линейной алгебры в комплексном пространстве и теорему единственности для комплексных систем.

n° 26 ПРИМЕР СИСТЕМЫ С КРАТНЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

Рассмотрим системы на плоскости

$$\frac{dx}{dt} = ax + y$$
$$\frac{dy}{dt} = ay \tag{26.1}$$

Ее матрица имеет каноническую жорданову форму

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \tag{26.2}$$

Найдем фазовый портрет этой системы. Переходя к одному уравнению, причем удобно искать x в виде функции от y ,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \frac{1}{a} \qquad (26.8)$$

получаем для x линейное уравнение. Его решение имеет вид

$$x = Cy + \frac{1}{a} y \ln y \qquad (26.4)$$

где C -произвольная постоянная. Вводя другую произвольную постоянную по формуле

$$C = -\frac{1}{a} \ln b \qquad (26.5)$$

получаем выражение для x

$$x = \frac{1}{a} y \ln \frac{y}{b} \qquad (26.6)$$

показывающее простой геометрический смысл постоянной b - это точка, в которой решение пересекает ось y. Все кривые имеют в начале координат общую касательную - ось абсцисс, причем касаются каждого луча (положительного и отрицательного) только с одной стороны. Общий вид изображен на рис.I

Рис.I Кратные корни. Фазовый портрет.

Этот пример показывает принципиальную важность систем с кратными корнями . Его значение будет ясно, если рассмотреть систему, зависящую от параметра δ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (a+2\delta)x + y \\ \frac{dy}{dt} &= (\delta-\delta^2)x + ay \end{aligned}\right\} \tag{26.7}$$

Вековое уравнение этой системы

$$\begin{vmatrix} a+2\delta-\lambda & 1 \\ \delta-\delta^2 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{26.8}$$

имеет корни

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a+\delta+\sqrt{\delta} \\ \lambda_2 &= a+\delta-\sqrt{\delta} \end{aligned} \tag{26.9}$$

действительные при $\delta>0$ и комплексные при $\delta<0$.

Таким образом, кратные корни служат границей между особыми точками типа фокуса и особыми точками типа узла.

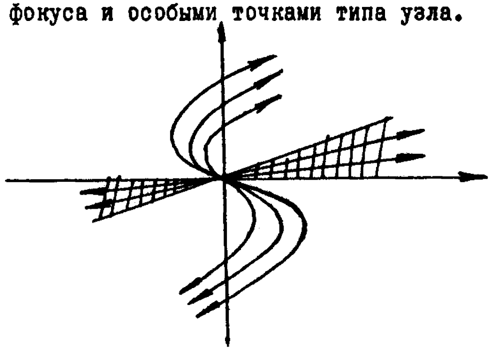


Рис.2 Узел, возникающий при малых $\delta>0$.

Так как комплексные корни действительного многочлена всегда попарно сопряжены, то узел может превратиться в фокус только одним способом - корни по дороге должны стать кратными, как раз в этот момент, когда мнимая часть двух комплексных сопряженных корней обращается в нуль. Это простое соображение показывает, что разобранный пример иллюстрирует общую закономерность - из кратных корней может "родиться" фокус или узел в зависимости от направления изменения.

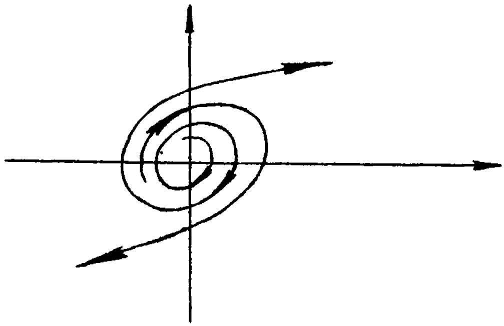


Рис.3 "Рождение" фокуса при $\delta < 0$.

§ 27. ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ

Решение линейной системы,

$$\frac{dz}{dt} = Cz \tag{27.1}$$

итерационным способом приводит к появлению матричной экспоненты

$$S = e^{Ct} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} C^n \tag{27.2}$$

Эта функция является частным случаем степенных рядов от матриц

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n \tag{27.3}$$

с комплексными числовыми коэффициентами a_n.

В полной аналогии с обычными степенными рядами доказывается абсолютная сходимость ряда (3) внутри "круга" сходимости,

$$|A| < r \tag{27.4}$$

так как матричный ряд мажорируется сходящимся числовым рядом с положительными членами

$$\sum_{0}^{\infty} |a_n| \rho^n \tag{27.5}$$

где число ρ выбрано из условия

$$|A| \leq \rho < r \tag{27.6}$$

Это простое соображение позволяет рассматривать большой класс функций от матриц. Например $\cos A$, $\operatorname{arctg} A$, $\sqrt{E+A^2}$ и т.д. Из общих свойств этих функций для дальнейшего полезна формула,

$$f(U^{-1}AU) = U^{-1} f(A) U \tag{27.7}$$

имеющая место всякий раз, когда обе матрицы A и преобразованная $B = U^{-1}AU$ принадлежат области сходимости степенного ряда, определяющего функцию $f(x)$.

Доказательство

Из ассоциативности умножения матриц вытекает цепочка равенства

$$\left.\begin{aligned} E &= U^{-1} E U \\ B &= U^{-1} A U \\ B^2 &= U^{-1} A^2 U \\ \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \\ B^n &= U^{-1} A^n U \end{aligned}\right\} \tag{27.8}$$

Умножая эти равенства на комплексные числа $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ и складывая, получаем:

$$a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + \cdots + a_n B^n = U^{-1}(a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n) U \tag{27.9}$$

после чего предельный переход при $n \to \infty$ дает требуемое равенство.

Особенно существенны для нас свойства матричной экспоненты. Однако предварительно необходимо указать, что формула бинома Ньютона

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \tag{27.10}$$

верна для матриц только в том случае, когда они перестановочны

$$AB = BA \tag{27.11}$$

В противном случае неверна формула уже для квадрата суммы:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \qquad (27.12)$$

Заметим, что биномиальные коэффициенты обязаны своим происхождением процедуре приведения подобных членов, а подобными эти члены могут быть только тогда, когда матрицы перестановочны. Стоит заметить, что другая форма бинома Ньютона

$$(E+x)^{\alpha} = E + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 + \dots \qquad (27.13)$$

остается справедливой даже для иррациональных показателей (более того, α может быть комплексным числом !). Условие сходимости этого ряда точно такое же, как для числового

$$|x| < 1 \qquad (27.14)$$

Суть дела соотоит в том, что единичная матрица E перестановочна с любой матрицей x .

Привычные из анализа, свойства показателей функции остаются справедливыми для перестановочных матриц.

Свойство I. Если

$$AB = BA \qquad (27.15)$$

то

$$e^{A+B} = e^{A} e^{B} \qquad (27.16)$$

Доказательство: Рассмотрим абсолютно сходящийся двойной матричный ряд:

$$f(A,B) = \sum_{k,\ell=0}^{\infty}\sum \frac{A^k B^{\ell}}{k!\,\ell} = \sum_{k,\ell=0}^{\infty}\sum \frac{A^k B^{\ell}}{k!\,\ell!} \qquad (27.17)$$

Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка суммирования. Просуммируем этот ряд двумя способами:

$$
\begin{tikzcd}
a_{00} \arrow[r] \arrow[d] & a_{01} \arrow[r] & a_{02} \arrow[r] & \cdots \\
a_{10} \arrow[r] \arrow[d] & a_{11} \arrow[r] & a_{12} \arrow[r] & \cdots \\
a_{20} \arrow[r] \arrow[d] & a_{21} \arrow[r] & a_{22} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_{00} \arrow[d] & a_{01} & a_{02} & \cdots \\
a_{10} \arrow[ur] \arrow[d] & a_{11} \arrow[ur] & a_{12} \arrow[ur] & \cdots \\
a_{20} \arrow[ur] \arrow[d] & a_{21} \arrow[ur] & a_{22} \arrow[ur] & \cdots \\
\cdots \arrow[ur] & \cdots \arrow[ur] & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

При первом способе получаем

$$
f(A,B)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{k!}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{B^{\ell}}{\ell!}\right]A^{k}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}e^{B}A^{k}=e^{B}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k}}{k!}=e^{B}e^{A} \tag{27.18}
$$

При втором способе суммирование идет сначала по диагонали, а затем по главной диагонали. Первое суммирование существенно использует бином Ньютона.

$$
f(A,B)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\sum_{k+\ell=n}\frac{n!}{k!\,\ell!}A^{k}B^{\ell}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^{n}=e^{A+B} \tag{27.19}
$$

Доказательство завершено.

<u>Вопрос</u> Доказано, что $\exp(A+B)=\exp B\cdot\exp A$,

между тем как сформулировано другое свойство

$\exp(A+B)=\exp A\cdot\exp B$

Как исправить доказательство ?

Свойство П. Обобщенная формула Эйлера. Если

$$
AI=IA \tag{27.20}
$$

и, кроме того матрица I есть матричный аналог "корня из минус единицы", то есть

$$I^2 = -E \tag{27.21}$$

то

$$e^{IA} = \cos A + I \sin A \tag{27.22}$$

<u>Доказательство.</u>

$$e^{IA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(IA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I^{2n} A^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I^{2n+1} A^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n} + I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$$

Доказательство закончено, так как первая сумма есть ряд для косинуса, а вторая - ряд для синуса. В матричных функциях принято сохранять обозначения анализа, указывая соответствующий аргумент:

$$\cos A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n} = E - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \frac{A^6}{6!} + \dots \tag{27.23}$$

$$\sin A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \frac{A^7}{7!} + \dots \tag{27.24}$$

Если первые два свойства являются обобщением на случай матричного аргумента известных свойств показательной функции, то следующие два не имеют аналога для числовой функции. Они связаны со специфическим свойством матриц - существованием делителей нуля. Так называются матрицы, отличные от нуля, произведение которых равно нулю

$$AB = 0 \tag{27.25}$$

например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что в нашем примере

$$BA \neq 0$$

Свойство Ш. Если

$$AB = BA = 0 \tag{27.26}$$

то

$$e^{A+B} = e^{A} + e^{B} \tag{27.27}$$

Это свойство, совершенно неожиданное и неверное для чисел, оказывается справедливым для матриц. Вытекает оно из того обстоятельства, что

$$(A+B)^{n} = A^{n} + B^{n} \tag{27.28}$$

Если матрицы A и B перестановочные делители нуля, тогда очевидно, что

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n + B^n}{n!} = e^{A} + e^{B} \tag{27.29}$$

Существование делителей нуля сказывается еще одним способом. Имеются матрицы, неравные нулю, степень которых равна нулю. В этом случае экспонента обращается в многочлен.

Свойство IУ. Если

$$A^{n+1} = 0 \qquad (27.30)$$

то

$$e^{A} = E + A + \frac{A^{2}}{2!} + \frac{A^{3}}{3!} + \dots + \frac{A^{n}}{n!} \qquad (27.31)$$

§ 28. СЛУЧАЙ КРАТНЫХ КОРНЕЙ. ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Число собственных векторов x ,

$$(A-\lambda E)x=0 \tag{28.I}$$

соответствующих данному собственному числу λ ,

$$\det(A-\lambda E)=P(\lambda)=0 \tag{28.2}$$

определяется рангом матрицы $A-\lambda E$. Если кратность λ равна K , то ранг

$$\operatorname{rang}(A-\lambda E)\geq n-k \tag{28.3}$$

В случае равенства система (I) имеет ровно k линейно независимых решений, каждое из которых является собственным вектором. Именно такова единичная матрица,

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\end{pmatrix} \tag{28.4}$$

имеющая единицу n -кратным собственным числом. Для нее любой базис является базисом, состоящим из собственных векторов.

Однако для матрицы A

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&3\\0&0&2\end{pmatrix} \tag{28.5}$$

$\lambda=2$ является трехкратным собственным числом, $k=3$, между тем, как ранг матрицы $A-\lambda E$,

$$A-2E=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{28.6}$$

равен единице. Следовательно, число собственных векторов меньше кратности собственного значения. В самом деле, система (I) сводится для матрицы (5) к единому уравнению

$$3(x)^{(3)}=0 \tag{28.7}$$

которое имеет два линейно-независимых решения:

$$\bar{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}; \qquad \bar{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \tag{28.8}$$

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что понятие присоединенного вектора является обобщением понятия собственного вектора.

Присоединенным вектором ℓ-ого ранга (или ℓ-ым присоединенным вектором) называется вектор x_ℓ, удовлетворяющий уравнению,

$$(A-\lambda E)^{\ell+1}x_\ell=0 \tag{28.9}$$

но не удовлетворяющий предыдущему уравнению,

$$(A-\lambda E)^{\ell}x_\ell\neq 0 \tag{28.10}$$

Каждый присоединенный вектор порождает цепочку присоединенных векторов всех низших рангов, заканчивающуюся присоединенным вектором нулевого ранга - собственным вектором. В самом деле

$$(A-\lambda E)^{\ell+1} x_\ell = (A-\lambda E)^{\ell} x_{\ell-1} = (A-\lambda E)^{\ell-1} x_{\ell-2} = \dots = (A-\lambda E) x_0 = 0 \qquad (28.11)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} (A-\lambda E)x_\ell &= x_{\ell-1} \\ (A-\lambda E)x_{\ell-1} &= x_{\ell-2} \\ \dots & \dots \\ (A-\lambda E)x_1 &= x_0 \\ (A-\lambda E)x_0 &= 0 \end{aligned} \qquad (28.12)$$

Эту цепочку равенств можно записать в виде:

$$\begin{aligned} Ax_0 &= \lambda x_0 \\ Ax_1 &= \lambda x_1 + x_0 \\ Ax_2 &= \lambda x_2 + x_1 \\ \dots & \dots \\ Ax_\ell &= \lambda x_\ell + x_{\ell-1} \end{aligned} \qquad (28.13)$$

Теорема Жордана, доказательство которой выходит за рамки курса, может быть сформулирована в следующем виде:

Если k - кратность собственного значения λ, то уравнение

$$(A-\lambda E)^k x = 0 \qquad (28.14)$$

имеет равно k линейно-независимых решений.

Может случиться, что нужное число решений имеет уравнение меньшей степенью. Так, например, для матрицы (4) уже первая степень дает все n линейно-независимых решений. Для матрицы (5) полный набор решений дает вторая степень. Поэтому практически удобно начинать с первой степени, то есть с отыскивания собственных векторов,

$$(A - \lambda E)x = 0 \tag{28,15}$$

и переходить к более высоким степеням только в том случае, если предыдущие не дали необходимого количества решений. Высказанное выше утверждение гарантирует, что число шагов не больше кратности собственного значения λ . Если оно в самом деле меньше, то полный набор присоединенных векторов состоит из нескольких цепочек.

Так как каждая цепочка заканчивается собственным вектором, то число цепочек равно числу линейно-независимых решений системы (I). Поэтому, решив систему (I), мы находим базис в пространстве собственных векторов и узнаем число цепочек. Однако "конечные" собственные векторы цепочек можно найти, только отыскав старшие присоединенные векторы каждой цепочки, для чего необходимо решать последовательно уравнения с более высокими степенями ($A - \lambda E$).

БИОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС, СТРОКИ И СТОЛБЦЫ.

До сих пор речь шла о векторах- столбцах. По правилу умножения прямоугольных матриц столбцы записываются справа от квадратной матрицы A

$$u = Ax = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \tag{29.I}$$

Эта запись содержит n равенств

$$\begin{aligned} u^1 &= A_1^1 x^1 + A_2^1 x^2 + \dots + A_n^1 x^n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ u^n &= A_1^n x^1 + A_2^n x^2 + \dots + A_n^n x^n \end{aligned} \tag{29.2}$$

которые можно записать в виде одного, используя правило Эйнштейна,

$$u^\alpha = A_\beta^\alpha x^\beta \tag{29.3}$$

Для практических вычислений целесообразно наряду со столбцами рассматривать также и строки, которые нужно писать слева от матрицы A :

$$V = YA = (y_1\ y_2 \dots y_n) \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \dots & & & \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix} (V_1\ V_2 \dots V_n) \tag{29.4}$$

Эта запись также может быть расшифрована двумя способами, подробно

$$\begin{aligned} V_1 &= y_1 A_1^1 + y_2 A_1^2 + \dots\ y_n A_1^n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ V_n &= y_1 A_n^1 + y_2 A_n^2 \dots\ y_n A_n^n \end{aligned} \tag{29.5}$$

или в тензорных обозначениях:

$$V_\alpha = y_\beta A_\alpha^\beta \tag{29.6}$$

Разница между строками и столбцами сказывается в том, какой индекс, верхний или нижний, матрицы A "расходуется" на суммирование.

Вполне аналогично понятию собственного столбца,

$$Ax = \lambda x \tag{29.7}$$

можно ввести понятие собственной строки

$$yA = \mu y \tag{29.8}$$

Нетрудно понять, что собственные числа оказываются корнями одного и того же характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{29.9}$$

Ортогональность

Собственная строка и собственный столбец, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

Действительно. Составим произведение трех матриц y, A и x. Оно имеет смысл только в одном порядке

$$yAx = z \tag{29.10}$$

и является числом, то есть матрицей первого порядка. Ассоциативность умножения матриц позволяет записать это число в двух формах

$$(yA)x = y(Ax) \tag{29.11}$$

после чего можно использовать тот факт, что x и y являются собственными элементами матрицы A :

$$\mu(yx) = \lambda(yx) \tag{29.12}$$

откуда вытекает равенство

$$(\lambda-\mu)(yx)=0 \tag{29.13}$$

приводящее в случае различных ($\lambda \neq \mu$) собственных значений, к ортогональности собственных строк и столбцов

$$yx=0 \tag{29.14}$$

Параллельное вычисление собственных строк и столбцов особенно эффективно в случае различных собственных чисел. В этом случае удобно построить следующую схему:

$$\begin{matrix} (y_1^1\; y_2^1 \dots y_n^1) \\ (y_1^2\; y_2^2 \dots y_n^2) \\ \dots\dots\dots \\ (y_1^n\; y_2^n \dots y_n^n) \end{matrix} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_2^n \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix} \tag{29.15}$$

Слева размещены собственные строки матрицы А, справа же собственные столбцы. Порядок столбцов произволен, а порядок строк согласован с порядком столбцов. Кроме того, строки нормированы так, чтобы произведение на одноименный столбец равнялось единице.

$$y^k x_k = 1 \qquad (29.16)$$

Так как произведение разноименных строк и столбцов по доказанному выше равно нулю, то вместе с условием нормировки это дает равенство

$$YX = E \qquad (29.17)$$

где Y -матрица строк, а X -матрица столбцов.

Нетрудно проверить, что допускает простую матричную интерпретацию и тот факт, что матрица Y составлена из собственных строк матрицы A, а матрица X - из собственных столбцов.

Вводя диагональную матрицу из собственных чисел матрицы A

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (29.18)$$

можно записать матричные равенства

$$AX = X\Lambda \qquad (29.19)$$

и

$$YA = \Lambda Y \qquad (29.20)$$

эквивалентные полной серии векторных равенств (7) и (8).

Важно подчеркнуть, что диагональная матрица Λ должна стоять справа от матрицы столбцов и слева от матрицы строк. Векторные равенства (10) (которых можно написать n^2 штук) объединяются в одно матричное,

$$YAX = \Lambda \tag{29.21}$$

получающееся, конечно, из-за ассоциативности умножения матриц как следствие (I7), и одного (любого) из равенств (I9) или (20). Так как равенство (I7) означает, что матрица строк является обратной к матрице столбцов,

$$Y = X^{-1} \tag{29.22}$$

то одновременное вычисление собственных строк и столбцов означает вычисление матрицы, приводящей A к диагональной форме:

$$X^{-1}AX = \Lambda \tag{29.23}$$

Строки столбцы образуют биортогональный базис, позволяющий очень просто находить разложение произвольного вектора X по собственным векторам матрицы.

$$X = c^1X_1 + c^2X_2 + \ldots + c^nX_n \tag{29.24}$$

Умножая столбец X на i -ую строку y^i получаем:

$$y^iX = c^i \tag{29.25}$$

откуда вытекает общее разложение:

$$X = (y^aX)X_a \tag{29.26}$$

Для строк имеет место двойственное разложение

$$y = y^a(yX_a) \tag{29.27}$$

№ 30 БИОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

Вычисление присоединенных строк, параллельное вычисление присоединенных столбцов позволяет существенно упростить выкладки также и в случае кратных собственных чисел. Доказательство существования цепочки присоединенных строк, биортогональной к данной цепочке присоединенных векторов относится к линейной алгебре. В курсе уравнений этот факт будет использоваться без доказательства.

Итак предположим, что построена (решением цепочки систем линейных уравнений) цепочка присоединенных столбцов

$$
\begin{aligned}
&Ax_0 = \lambda x_0 \\
&Ax_1 = \lambda x_1 + x_0 \\
&\dots\dots\dots \\
&Ax_l = \lambda x_l + x_{l-1}
\end{aligned}
\tag{30.I}
$$

и биортогональная к ней цепочка строк $y^0, y^1 \dots y^l$, определяемая свойствами:

$$
(y^m, x_i) = \begin{cases} 0, & m \neq i \\ 1, & m = i \end{cases}
\tag{30.2}
$$

Построим полную матрицу строк Y, полную матрицу столбцов X и составим, как и раньше, произведение YAX. Проследим только за теми участками матриц, на которых расположены строки и столбцы рассматриваемой цепочки:

$$
YAX = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ y^0 \\ y^1 \\ \dots\dots\dots \\ y^l \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & \begin{pmatrix} x_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \end{pmatrix} & \dots \end{pmatrix}
\tag{30.3}
$$

Используя ассоциативность умножения матриц, перемножим сначала последние две матрицы, что сводится к применению матрицы к элементам цепочки:

$$YAX = Y(AX) = \begin{pmatrix} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y^0 \\ y^1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y^l \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & \lambda x_0 & \lambda x_1 + x_0 & \cdots & \lambda x_l + x_{l-1} \end{pmatrix} \quad (30.4)$$

Существенное отличие от случая различных собственных значений состоит в том, что строка y^0 дает ненулевой результат при умножении на два столбца. Во-первых, умножение на столбец λx_0 дает число λ , а во-вторых, умножение на следующий столбец, а котором есть слагаемое x_0, также дает ненулевой результат, а именно единицу. Совершенно аналогично строка y^1 дает λ и 1 при умножении на "свой" столбец и следующий за ним. Только умножение y^l дает единственный ненулевой результат - при умножении на "свой" столбец - так как следующий столбец является собственным столбцом другой цепочки, либо вообще относится к другому собственному числу. В результате возникает характерная форма жордановой клетки, в которой по главной диагонали стоит собственное число, а соседняя диагональ заполнена единицами:

$$YAX = \begin{pmatrix} \begin{array}{|ccccc|} \hline \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \\ \hline \end{array} \end{pmatrix} = \Lambda \qquad (30.5)$$

Таким образом собственные и присоединенные столбцы вместе с собственными и присоединенными строками образуют биортогональный базис, в котором матрица приводится к нормальной форме Λ .

Если характеристическое уравнение имеет кратные корни, то ненулевые элементы (но всегда только единицы) могут появиться и на следующей (выше главной) диагонали матрицы Λ .

Полезно помнить, что единица может появиться только на таком месте, левее и ниже которого стоит одно и то же собственное число. Однако ее там может и не быть - это зависит от вида распадения на цепочки. Так, например, в случае четырехкратного корня возможны пять различных типов нормальной формы:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad (30.6)$$

<u>Задача I</u>. Выписать все возможности для пятикратного корня. Сколько есть разных типов для кратности шесть?

Нормальная форма представлена в виде суммы двух матриц:

$$\Lambda = \lambda + J \qquad (30.7)$$

одна из которых является чисто диагональной

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (30.8)$$

а вторая состоит из нескольких цепочек единиц на второй диагонали

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c} \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \end{array}\right) \qquad (30.9)$$

Для случая различных собственных значений,

$$\mathcal{J} = 0 \tag{30.10}$$

но даже в самом общем случае матрица $\mathcal{J}$ обладает аналогичным свойством,

$$\mathcal{J}^{\ell} = 0 \tag{30.11}$$

где ℓ -длина максимальной цепочки присоединенных столбцов. На примере четырехзвенной цепочки видно, что происходит при возведении $\mathcal{J}$ в возрастающую степень.

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{J}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{J}^4 = 0 \tag{30.12}$$

Ясно, что и в общем случае $\mathcal{J}$ в первой степени имеет единицы только на первой диагонали, $\mathcal{J}^2$ только на второй, $\mathcal{J}^3$ только на третьей и т.д., причем эти единицы расположены только на участке диагонали, лежащем внутри соответствующей жордановой клетки. Поэтому при возведении в максимальную степень $\mathcal{J}^{\ell}$ обращается в нуль. Наконец, последнее свойство, которое понадобится при решении автономных линейных систем дифференциальных уравнений, состоит в том, что матрицы $\mathcal{J}$ и λ перестановочны:

$$\lambda \mathcal{J} = \mathcal{J} \lambda \tag{30.13}$$

что позволит применить к ним основное свойство экспоненты.

$n^{\circ}3$ СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ. КВАЗИМНОГОЧЛЕНЫ

Из формул предыдущего параграфа вытекает, что

$$A = X \Lambda X^{-1} \tag{31.1}$$

откуда на основании общих свойств функций от матрицы получаем

$$e^{At} = X e^{\Lambda t} X^{-1} \tag{31.2}$$

Поэтому вычисление экспоненты от произвольной матрицы A сводится к вычислению экспоненты от нормальной формы Λ. Из формул (30.7) и (30.13) на основании главного свойства экспоненты для перестановочных матриц имеем:

$$e^{\Lambda t} = e^{\lambda t} e^{\mathcal{J} t} \tag{31.3}$$

Показательная функция от диагональной матрицы есть диагональная матрица

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \tag{31.4}$$

а показательная функция от матрицы $\mathcal{J}t$ сводится к многочлену от времени,

$$e^{\mathcal{J} t} = E + \frac{t \mathcal{J}}{1!} + \frac{t^2 \mathcal{J}^2}{2!} + \dots + \frac{t^{\ell-1} \mathcal{J}^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \tag{31.5}$$

так как ℓ-ая степень (и все последующие степени) этой матрицы равна нулю.

Так, например,

$$e^{\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (31.6)$$

<u>Задача I.</u> Вычислить e^{Jt} для всех типов нормальной формы пятикратного корня. Какова максимальная степень t ?

Перемножение матриц $e^{\lambda t}$ и e^{Jt} показывает, что жордановой клотке ℓ -ого порядка,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \qquad (31.7)$$

соответствует экспонента следующего вида:

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \frac{t}{1!}e^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \frac{t}{1!}e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{\ell-2}}{(\ell-2)!}e^{\lambda t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \qquad (31.8)$$

Полученный результат позволяет найти структуру произвольного решения линейной автономной системы. Из теоремы существования и единственности вытекает, что любое решение имеет вид:

$$\lambda(t) = e^{At}x(0) \qquad (31.9)$$

где $x(0)$ - столбец начальных данных. Любой столбец можно разложить по базису из собственных и присоединенных векторов

$$x(0) = c^1 x_1 + c^2 x_2 + \cdots + c^n x_n \qquad (31.10)$$

Подставляя вместо e^{At} его выражение,

$$e^{At} = X e^{\Lambda t} Y \qquad (31.11)$$

нетрудно получить, используя ассоциативность умножения матриц:

$$x(t) = (X e^{\Lambda t})(Y x(0)) \qquad (31.12)$$

Вычислим подробнее второй множитель, вспоминая, что Y составлена из собственных и присоединенных строк:

$$Y(x(0)) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^1 x_1 + \cdots + c^n x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix} \qquad (31.13)$$

Этот последний результат получился потому, что y-ки образуют биортогональный базис с x-ами. Поэтому каждый y выделяет из линейной комбинации коэффициент при "своем" x.

Таким образом любое решение представимо в виде,

$$x(t) = X e^{\Lambda t} C \qquad (31.14)$$

где буквой C обозначен столбец произвольных постоянных

$$C = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix} \qquad (31.15)$$

Различные частные решения получаются, если одну из произвольных постоянных положить равной единице, а остальные - нулями. Если матрица Λ диагональна, то такая процедура выделяет каждый раз один столбец матрицы, и получается уже известный результат - при различных собственных числах собственные решения,

$$x(t) = e^{\lambda_k t} x_k \qquad (31.16)$$

образуют полный набор линейно-независимых решений.

Иное дело частные решения в случае кратных корней. В этом случае одних собственных решений оказывается мало и к ним нужно присоединить (термин взят именно из такого хода мысли) "присоединенные" решения. Эти решения уже не сводятся, как собственные, к движению вдоль инвариантного луча - собственного направления. Они могут располагаться на плоскости, в пространстве и т.д.

Пусть $x_k = x_{k0}$ собственный вектор, а векторы $x_{k1}, x_{k2}, \ldots x_{k\,\ell-1}$ образуют цепочку присоединенных столбцов. Рассмотрим решение, для которого столбец начальных данных есть "эль минус первый" присоединенный столбец,

$$x(0) = x_{k\,\ell-1} \qquad (31.17)$$

Из формулы (12) с учетом структуры жордановой клетки, задаваемой равенством (8), нетрудно найти вид этого частного решения:

$$x(t) = \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{\lambda t} x_{k_0} + \frac{t^{\ell-2}}{(\ell-2)!} e^{\lambda t} x_{k_1} + \dots + e^{\lambda t} x_{k_{\ell-1}} \quad (31.18)$$

Это частное решение в двух пунктах существенно отличается от привычного собственного решения.

Во-первых, оно "помещается" только в ℓ-мерном пространстве, а не на прямой, как собственные решения.

Во-вторых, кроме привычной показательной функции появляются еще степени t.

<u>Определение.</u>

Выражение

$$\varphi(t) = t^m e^{\lambda t} \quad (31.19)$$

при любом целом $m \geq 0$ и любом комплексном λ называется квазиодночленом степени m.

Линейная комбинация квазиодночленов называется квазиодночленом.

Вопрос: Является ли выражение $\varphi(t) = t^2 \sin \omega t$ квазиодночленом? Квазимногочленом?

Таким образом произвольное решение линейной автономной системы n-го порядка есть линейная комбинация n линейно независимых частных решений.

Каждое частное решение порождается присоединенным столбцом (в частности собственным столбцом) и является квазимногочленом.

степень которого равна рангу порождающего присоединенного столбца.

В частности собственный столбец порождает квазиодночлен нулевой степени - собственное решение .

32 МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

Решение однородной системы линейных уравнений

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = A^\alpha_\beta x^\beta \tag{32.1}$$

требует, как мы видели в предыдущих параграфах, довольно сложной алгебраической процедуры, включающей отыскание корней векового уравнения

$$P(\lambda) = \det |A - \lambda E| = 0 \tag{32.2}$$

Особенно громоздко решение в случае кратных корней, когда могут появиться не только собственные векторы, но и присоединенные.

Однако, если решение однородной системы,

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{32.3}$$

найдено, то принципиально весьма просто можно найти решение неоднородной системы,

$$\frac{dy}{dt} = Ay + b(t) \tag{32.4}$$

где $b(t)$-произвольная непрерывная вектор-функция скалярного аргумента t.

Основная идея состоит в том, чтобы использовать решение однородной системы

$$x = e^{At}\xi \tag{32.5}$$

Будем искать решение неоднородной системы в аналогичной форме,

$$y(t) = e^{At}h(t) \tag{32.6}$$

но "разрешим" вектору h зависеть от времени t.

Подставка (6) в (4) дает

$$e^{At}\frac{dh}{dt} + A e^{At}h = A e^{At}h + b(t) \tag{32.7}$$

откуда находим, после приведения подобных и умножения обеих частей равенства слева на матрицу e^{-At}:

$$\frac{dh}{dt} = e^{-At}b(t) \tag{32.8}$$

До сих пор выкладки не предполагали значения решения однородной системы, то есть матрицы e^{At}. Если теперь это предположить, то отыскание $h(t)$ сводится к квадратуре

$$h = c + \int_0^t e^{-A\tau}b(\tau)d\tau \tag{32.9}$$

так как под знаком интеграла стоит известная функция. Буква c означает, по традиции, константу интегрирования, однако на этот раз c есть вектор имеющий " n " независимых (но постоянных) компонент. Смысл этого вектора легко понять, если найти решение $y(t)$:

$$y(t) = e^{At}c + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}b(\tau)d\tau \tag{32.10}$$

и положить $t=0$. Получится равенство

$$y(0)=c \tag{32.11}$$

означающее, что вектор c есть не что иное, как вектор начальных данных решения $y(t)$.

Форму (10) можно переписать иначе, внося множитель e^{At} под знак интеграла и используя перестановочность этой матрицы с матрицей $e^{A\tau}$ (доказать!)

$$y(t)=e^{At}y_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}b(\tau)\,d\tau \tag{32.12}$$

Полученное решение есть сумма общего (содержащего начальные данные) решения однородной системы и частного (не зависящего от начальных данных и обращающегося в нуль при $t=0$) решения неоднородной системы.

Замечание 1.

Геометрический смысл подстановки (6) состоит в переходе в систему координат h, движущуюся вдоль траекторий однородной системы. Поэтому при отсутствии правых частей, то есть, при $b(t)=0$, вектор сохраняет постоянное значение, как это видно из формулы (9).

Замечание II.

Анализ решения однородной системы, проведенный выше, приводит к выводу, что коэффициенты матрицы e^{At} являются линейными комбинациями ("квазимногочленами") функций вида,

$$\varphi(t)=t^{\ell}e^{\lambda t} \tag{32.13}$$

которые называются "квазиодночленами". Число ℓ – целое, положительное или нуль.

Замечание III.

Если правые части являются квазимногочленами, то и решение также является квазимногочленом.

Это замечание является следствием трех утверждений.

I. Сумма квазимногочленов есть квазимногочлен.

П. Произведение квазимногочленов есть квазимногочлен.

Ш. Интеграл (определенный или неопределенный) от квазимногочлена есть также квазимногочлен.

В доказательстве нуждается только третье утверждение, причем достаточно доказать его для квазиодночлена.

<u>Доказательство:</u>

Если $\varkappa \neq 0$, то

$$\int t^k e^{\varkappa t} dt = \frac{1}{\varkappa} t^k e^{\varkappa t} - \frac{k}{\varkappa} \int t^{k-1} e^{\varkappa t} dt \qquad (32.14)$$

Так как k -целое число, то через k шагов останется интеграл вида

$$\int e^{\varkappa t} dt = \frac{e^{\varkappa t}}{\varkappa} \qquad (32.15)$$

и утверждение доказано.

Если же $\varkappa = 0$, то

$$\int t^k dt = \frac{t^{k+1}}{k+1} \qquad (32.16)$$

и утверждение опять-таки доказано.

33. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Методы решения уравнений,

$$\mathcal{L}(x) = 0 \tag{33.1}$$

в анализе основаны на изучении поведения функции $\mathcal{L}(x)$

$$y = \mathcal{L}(x) \tag{33.2}$$

стоящей в любой части уравнения Определение границ области существования функции $\mathcal{L}(x)$ и основных особенностей ее строения предшествует изучению более тонких свойств, к которым относятся, в частности, расположение нулей функции.

Аналогичный подход в теории дифференциальных уравнений,

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \tag{33.3}$$

приводит к понятию дифференциального оператора

$$y = \mathcal{L}(x) \equiv a_n \frac{d^n x}{dt} + \cdots + a_0 x \tag{33.4}$$

Этот существенный шаг в развитии идеи функциональной зависимости основан на возможности рассматривать множество функций как бесконечно-мерное векторное пространство – функциональное пространство.

Скольжению векторов и умножению вектора на число соответствуют обычные операции сложения функций и умножения функций на число.

При последовательном проведении этой точки зрения следовало бы начать с функционалов, у которых только аргумент принадлежит функциональному пространству, а значение есть простое число. Именно функционалы составляют предмет исследования вариационного исчисления.

Однако линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами оказываются более простым объектом, несмотря на то, что у них и аргумент и функция являются элементами функционального пространства.

Это связано с тем, что квазимногочлены степени k,

$$x(t) = (C_k t^k + C_{k-1} t^{k-1} + \cdots + C_1 t + C_0) e^{\lambda t} \quad (33.5)$$

при каждом (комплексном!) λ образуют конечномерное (размерности $k+1$) пространство, инвариантное относительно любого оператора (4).

Задача (33.1). Доказать инвариантность $R_{k,\lambda}$ относительно оператора $\mathcal{L}$. Это значит, что функция y,

$$y(t) = \mathcal{L}x$$

являющаяся результатом применения $\mathcal{L}$ к любому вектору x из $R_{k\lambda}$, также принадлежит пространству $R_{k\lambda}$, т.е. представима в виде (33.5) См.ниже теорему 6.

Поэтому все исследование фактически происходит в конечномерном пространстве. Однако понимание того важного обстоятельства, что во всех $R_{k\lambda}$ действует один и тот же оператор $\mathcal{L}$, психологически подготавливает к вариационному исчислению, где уже нельзя обойтись без функционального пространства.

Всюду в дальнейшем термин "оператор" употребляется для сокращения более точного термина "линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами". Имеют место следующие теоремы:

Теорема I. Сумма операторов есть оператор.

Теорема 2. Произведение (последовательное применение) двух операторов есть оператор и не зависит от перехода множителей (коммутативность).

Теорема 3. Любой оператор есть многочлен относительно оператора дифференцирования p

$$p = \frac{d}{dt} \tag{33.6}$$

$$\mathcal{L} = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \tag{33.7}$$

(Кольцо с одной образующей p).

Теорема 4. Произведению операторов $\mathcal{L}$ и M ,

$$\mathcal{L} = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \tag{33.8}$$

$$M = b_m p^m + \dots\dots\dots + b_1 p + b_0 \tag{33.9}$$

$$N = \mathcal{L} M \tag{33.10}$$

соответствует многочлен $N(p)$, являющийся произведением многочленов $\mathcal{L}(p)$ и $M(p)$.

(33.II)

<u>Теорема 5.</u> Действие оператора $\mathcal{L}$ на экспоненту $e^{\lambda t}$ равносильно умножению этой экспоненты на число, равное значению многочлена $\mathcal{L}(p)$ в точке (комплексной, вообще говоря) λ

$$\mathcal{L}(p)e^{\lambda t} = \mathcal{L}(\lambda)\, e^{\lambda t} \tag{33.I2}$$

<u>Теорема 6.</u> (Инвариантность пространства квазимногочлена)

Действие оператора на экспоненту $e^{\lambda t}$, умноженную на целую степень t^m, равносильно умножению этой экспоненты на многочлен от t, степени не выше m-ой, коэффициентами которого являются многочлены от λ

$$\mathcal{L}(p)[t^m e^{\lambda t}] = \mathcal{L}_m(\lambda, t)\, e^{\lambda t} \tag{33.I3}$$

Многочлен $\mathcal{L}_m(\lambda,t)$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{L}_m(\lambda,t) = \mathcal{L}(\lambda)t^m + m\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda}t^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{d^2\mathcal{L}}{d\lambda^2}t^{m-2} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k}\frac{d^k\mathcal{L}}{d\lambda^k}t^{m-k} + \dots + \frac{d^m\mathcal{L}}{d\lambda^m} \tag{33.I4}$$

<u>Мнемоническое правило</u>. Многочлен $\mathcal{L}_m(\lambda,t)$ можно вычислить по формуле бинома Ньютона,

$$\mathcal{L}_m(\lambda, t) = \left(\frac{d}{dt} + t\right)^m \mathcal{L}(\lambda) \tag{33.I5}$$

при раскрытии которого следует считать перестановочными символ дифференцирования по λ и умножение на переменную t.
(Независимость переменных λ и t).

<u>Доказательство</u>. Легко получается m-кратным дифференцированием формулы (I2) по λ.

<u>Теорема 7.</u> (решение однородного уравнения, простой корень)

Если λ есть корень многочлена $\mathcal{L}(\lambda)$,

$$\mathcal{L}(\lambda)=0 \tag{33.16}$$

то экспонента $e^{\lambda t}$ есть решение уравнения

$$\mathcal{L}(p)x(t)=0 \tag{33.17}$$

<u>Доказательство</u> вытекает из формулы (I2)

<u>Теорема 8</u> (Решение однородного уравнения, кратный корень)

Если λ есть корень многочлена $\mathcal{L}(\lambda)$ кратности $k+1$,

$$\mathcal{L}(\lambda)=0,\ \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda}=0,\ \dots,\ \frac{d^k\mathcal{L}}{d\lambda^k}=0 \tag{33.18}$$

то функции

$$x_1(t)=e^{\lambda t},\ x_2=te^{\lambda t},\ \dots,\ x_{k+1}=t^k e^{\lambda t} \tag{33.19}$$

являются решениями однородного уравнения

$$\mathcal{L}(p)x=0 \tag{33.20}$$

<u>Доказательство</u> вытекает из формулы (I3) и формулы (I5).

Теорема 9. (Решение неоднородного уравнения, краткий корень). Если λ есть корень многочлена $\mathcal{L}(\lambda)$ кратности, равной $k+1$

$$\mathcal{L}(\lambda)=0 \ldots \frac{d^k\mathcal{L}}{d\lambda^k}=0 \quad \frac{d^{k+1}\mathcal{L}}{d\lambda^{k+1}}\neq 0 \tag{33.21}$$

то функция

$$x(t)=t^{k+\ell+1}e^{\lambda t} \tag{33.22}$$

удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\mathcal{L}(p)x=Q_\ell(\lambda,t)e^{\lambda t} \tag{33.23}$$

в правой части которого стоит квазимногочлен равно ℓ-ой степени.

Доказательство вытекает из формулы (14), если положить $m=k+\ell+1$. Первым ненулевым членом в правой части будет тогда член:

$$Q_\ell(\lambda,t)=\mathcal{L}_{k+1+\ell}(\lambda,t)=\frac{m(m-1)\ldots(m-k)}{1\cdot 2\cdots(k+1)}\ \frac{d^{k+1}\mathcal{L}}{d\lambda^{k+1}}t^\ell+\ldots \tag{33.24}$$

то есть как раз член степени ℓ. Этот член является старшим - остальные имеют более низкие степени t.

34. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Теоремы предыдущего параграфа позволяют указать практический прием решения неоднородных уравнений, правые части которых являются квазимногочленами:

$$a_n\frac{d^nx}{dt^n}+\cdots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=P_1(t)e^{\mu_1 t}+\cdots+P_s(t)e^{\mu_s t} \tag{34.1}$$

Еще раз подчеркнем, что все коэффициенты и показатели вообще говоря комплексные числа.

Решение нужно искать также в форме квазимногочлена

$$x(t)=Q_1 e^{\mu_1 t}+\cdots Q_s(t)e^{\mu_s t}+R_1(t)e^{\lambda_1 t}+\cdots+R_\ell(t)e^{\lambda_\ell t} \qquad (34.2)$$

где показатели $\mu_1 \cdots \mu_s$ те же, что и в правой части исходного уравнения, а показатели $\lambda_1 \dots \lambda_\ell$ – корни характеристического многочлена

$$\mathcal{L}(\lambda)\equiv a_n\lambda^n+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \qquad (34.3)$$

Коэффициенты многочленов $R_1 \dots R_\ell$ – произвольные постоянные, а их степени на единицу меньше кратности соответствующего корня.

Коэффициенты многочленов $Q_1 \cdots Q_s$ находятся из системы уравнений, получаемой при подстановке указанной выше формы в левую часть уравнения.

Коэффициенты каждого из Q_i находятся независимо от остальных, то есть фактически достаточно решить уравнения

$$a_n\frac{d^n x_i}{dt^n}+\cdots+a_1\frac{dx_i}{dt}+a_0 x_i=P_i(t)e^{\mu_i t} \qquad (34.4)$$

отдельно для каждого μ_i и затем сложить полученные решения. Это свойство называется принципом суперпозиции для линейных систем.

Решение (4), как уже сказано, ищется в форме квазимногочлена

$$x_i(t)=Q_i(t)e^{\mu_i t} \qquad (34.6)$$

что степень Q_i равна степени P_i. Если же μ_i совпадает с одним из корней $\mathcal{L}(\lambda)$

$$\mu_i = \lambda \tag{34.7}$$

что степень Q_i должна быть увеличена по сравнению со степенью P_i на величину кратности корня μ_i.

Однако число коэффициентов, подлежащих определению, остается равным числу коэффициентов многочлена P_i, так как младшие члены не войдут в систему и можно их не писать.

Например, при решении уравнения

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = (t+3)e^{t} \tag{34.8}$$

решение надо искать в виде

$$x = (\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta)e^{t} \tag{34.9}$$

так как $\lambda = 1$ есть двукратный корень уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \tag{34.10}$$

вычисления показывают, что два коэффициента γ и δ можно не писать при составлении системы. Они должны, как это вытекает из общей теории, остаться произвольными

$$\begin{aligned}
x &= (\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta)e^{t} \\
\dot{x} &= (\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta + 3\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma)e^{t} \\
\ddot{x} &= [\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \beta + 2(3\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma) + 6\alpha t + 2\beta]\, e^{t}
\end{aligned} \tag{34.11}$$

Следовательно

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = (6\alpha t + 2\beta)e^{t} \qquad (34.I2)$$

и в полном согласии с общей теорией члены $(\gamma t + \delta)e^{t}$, являющиеся решением однородного уравнения не входят в систему

$$\left.\begin{aligned} 6a &= 1 \\ 2\beta &= 3 \end{aligned}\right\} ; \qquad \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{6} \\ \beta &= \end{aligned} \qquad (34.I3)$$

Если коэффициенты γ и δ с самого начала не писать, то выкладки существенно упрощаются

$$\left\{\begin{aligned} x &= (\alpha t^{3} + \beta t^{2})e^{t} \\ \dot{x} &= (\alpha t^{3} + \beta t^{2} + 3\alpha t^{2} + 2\beta t)e^{t} \\ \ddot{x} &= [\alpha t^{3} + \beta t^{2} + 2(3\alpha t^{2} + 2\beta t) + 6\alpha t + 2\beta]e^{t} \\ \ddot{x} - 2\dot{x} + x &= (6\alpha t + 2\beta)e^{t} \end{aligned}\right. \qquad (34.I4)$$

ГЛАВА V. ОКРЕСТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОЙ ТОЧКИ. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ.

35. ПРИМЕР ФУНКЦИИ ЧЕТАЕВА

Рассмотрим диагональную систему двух уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \qquad \frac{dy}{dt} = \mu y \tag{35.1}$$

и вычислим производную вдоль траекторий этой системы от следующей функции Четаева Н.Г.

$$N(x,y) = -\frac{1}{2}(\lambda x^2 + \mu y^2) \tag{35.2}$$

Вводя обозначение,

$$K(x,y) = \lambda^2 x^2 + \mu^2 y^2 \tag{35.3}$$

мы видим, что

$$\frac{dN}{dt} = -K \tag{35.4}$$

Функция $K(x,y)$ положительна и противоположна по знаку производной от функции N. Следовательно, сама функция N монотонно убывает вдоль каждой траектории системы.

Рассмотрим однопараметрическое семейство вложенных друг в друга замкнутых множеств $\mathcal{F}(c)$,

$$N(x,y) \leq C \tag{35.5}$$

Замечание: Удобна формальная запись

$$\mathcal{F}(c) = m\{x, y \; ; \; N(x,y) \leq c\}$$

Каждое из них является инвариантным множеством ("ловушкой" изучаемой системы. Это значит, что траектория, начинающаяся в точке, принадлежащей данному множеству $\mathcal{F}$ целиком (при $t \geq 0$) лежит внутри этого множества.

Разберем структуру множеств инвариантности для различных сочетаний знаков λ и μ.

I. Оба числа отрицательны, $\lambda < 0 \quad \mu < 0$.

Функция N положительна при всех x и y. Ее линии уровня являются эллипсами, а множества инвариантности совпадают с замыканием внутренностей этих эллипсов.

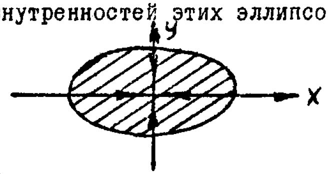


Рис. I. Решение не может покинуть окрестность стационарного решения.

П. Числа λ и μ имеют разные знаки, $\lambda > 0, \quad \mu < 0$.

Инвариантные множества ограничены гиперболами с общим ассимптотами,

$$\lambda x^2 + \mu y^2 = 0 \qquad (35.6)$$

Множество $N \leq 0$ играет особую роль

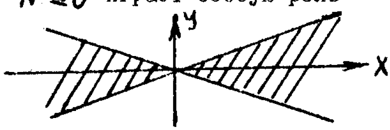


Рис. 2. Критическое множество в седловой точке.

Если $c > 0$, то множества $N \leq c$ содержат критическое множество $N \leq 0$. Казалось бы, что функция N должна неминуемо стать отрицательной, даже если вначале она была положительной, так как N убывает вдоль каждой траектории.

Однако темпы убывания могут замедляться. Так, например, функция n,

$$n = e^{-t}$$

монотонно убывает

$$\frac{dn}{dt} = -n$$

но остается положительной при всех t.

Аналогично этому в нашем случае инвариантными являются множества

$$0 \leq N(x,y) \leq c \qquad (35.7)$$

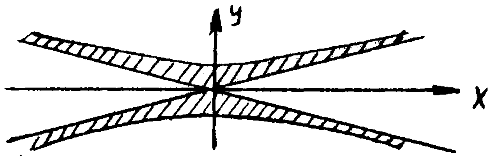


Рис. 3. Фактически инвариантные множества...

К сожалению, проведенный выше анализ недостаточен для выявления этого тонкого факта и устанавливает только инвариантность множеств

$$-\infty < N(x,y) < c \qquad (35.8)$$

Рис. 4. .... и то, что удается доказать.

Любое множество $N<0$ распадается на две односвязных компоненты, лежащие внутри сложных углов. Инвариантным множеством является каждая из них в отдельности (Доказать!)

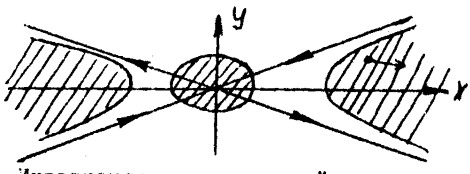


Рис. 5. Инвариантные множества "вытаскивают" решение из окрестности стационарной точки.

Решение вынуждено уходить все дальше от начала координат. Ниже будет показано, что гиперболой (например, левой ее ветвью) можно "извлечь" решение из произвольно малой окрестности стационарной точки.

III. Оба числа положительны, $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

Инвариантными множествами в этом случае являются внешние области (с гранями) семейства эллипсов.

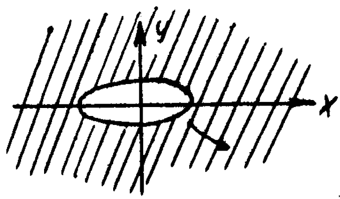


Рис. 6. Все решения "выталкиваются" из любой окрестности начала координат

Система абсолютно неустойчива.

§ 36. ЦИКЛ БЕЗ КОНТАКТА.ФУНКЦИЯ ЧЕТАЕВА

А. Пуанкаре ввел важное понятие " цикла без контакта", полезное при качественном изучении поведения траекторий

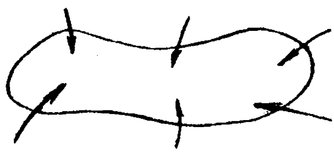


Рис.I Цикл без контакта

Так называется замкнутая линия, которую пересекает каждая траектория, имеющая с этой линией общую точку. Ясно, что такая линия образует "ловушку", так как все траектории идут внутрь такого цикла (или наоборот, только выходят из него).

Действительно, если бы часть траекторий втекала внутрь, а другая вытекала наружу, то обязательно нашлась бы касательная траектория

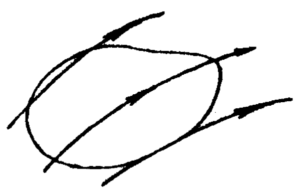


Рис.2 "Опорные" траектории

Идея Пуанкаре- чисто геометрическая и неудобна при аналитическом подходе. Более общим и гибким понятием оказалось понятие функции Четаева Н.Г.

Определение I. Непрерывно-дифференцируемая скалярная функция $N(x,\xi)$, заданная в некоторой окрестности G точки ξ, называется функцией Четаева системы

$$\frac{dx}{dt} = a(x) \tag{36.11}$$

если ее производная в силу системы,

$$\frac{dN}{dt} = -k \tag{36.2}$$

отрицательно определена

$$k(x,\xi) > l\,|x-\xi|^2 \tag{36.3}$$

а отношение

$$\frac{k}{|N|} > \alpha > 0 \tag{36.4}$$

ограничено снизу во всей области G.

Замечание: Область G может быть неограниченной и даже совпадать со всем пространством.

Основное свойство функции Четаева

Линии уровня функции Четаева оказываются обобщением "цикла без контакта" Пуанкаре. Они не обязаны, конечно, быть замкнутыми, но это только расширяет возможности применения. Удобно ввести понятие "множеств Четаева". Рассмотрим замкнутое множество (целиком расположенное в G), на котором функция Четаева ограничена некоторым числом C.

$$F_c = \mathfrak{M}\,[x,\ N(x,\xi) \le C]. \tag{36.5}$$

Из свойств (2) и (3) вытекает, что вдоль каждой траектории функция Четаева может только убывать. Нетрудно поэтому показать, что каждое множество F_c (при любом C) оказывается "ловушкой" - если начало какой-нибудь траектории (при $t=0$) принадлежит множеству F_c , т.е. отрезок траектории (при $t \geqslant 0$) лежащий внутри G , целиком принадлежит F_c.

Более точно это свойство функции Четаева описывается интегральным неравенством.

Интегральное неравенство. Отрицательные значения N.

Предположим, что отрезок некоторой траектории $x(\tau)$

$$0 \leqslant \tau \leqslant t \tag{36.6}$$

целиком лежит в G , причем функция N отрицательная на этом отрезке

$$N(\tau) < 0 \tag{36.7}$$

В этом случае N растет по абсолютной величине не медленнее экспоненты с показателем α.

$$|N(t)| > |N(0)|\, e^{\alpha t} \tag{36.8}$$

Доказательство

Разделим обе части равенства (2) на N и проинтегрируем в пределах от нуля до t:

$$\int_0^t \frac{1}{N}\frac{dN}{d\tau}\,d\tau = \int_0^t \left(-\frac{K}{N}\right) d\tau \tag{36.9}$$

Функция N отрицательна, поэтому

$$|N| = -N \tag{36.10}$$

и в силу неравенства (4) получаем:

$$\int_0^t -\frac{k}{N}\,d\tau = \int_0^t \frac{k}{|N|}\,d\tau > \int_0^t \alpha\,d\tau = \alpha t \tag{36.11}$$

Поэтому,

$$\ln|N(t)| - \ln|N(0)| > \alpha t \tag{36.12}$$

откуда и вытекает неравенство (36.8)

Отсюда вытекает, что попав в область $N<0$, траектория уходит все "глубже" в область отрицательных N .Скорость ухода оказывается экспоненциальной.

<u>Интегральное неравенство. Положительные значения N.</u>

Если отрезок траектории $x(\tau)$,

$$0 \leqslant \tau \leqslant t \tag{36.13}$$

целиком лежит в области, где N положительна,

$$N(\tau) > 0 \tag{36.14}$$

то функция $N(\tau)$ убывает быстрее экспоненты с показателем α :

$$N(t) < N(0)\,e^{-\alpha t} \tag{36.15}$$

<u>Доказательство</u>:

Опять разделим обе части равенства (2), однако на этот раз на минус N , чтобы справа стояла положительная величина и проинтегрируем от 0 до t :

(36.16)

Следовательно

$$\ln N(0) - \ln N(t) > \alpha t \qquad (36.17)$$

или

$$\ln N(t) < \ln N(0) - \alpha t \qquad (36.18)$$

Потенцирование снова приводит к требуемому неравенству.

Следует обратить внимание на два обстоятельства.

Во-первых, неравенство (3) до сих пор использовано еще не было. Во-вторых, имеется существенное различие в степени областей положительных и отрицательных значений.

Если траектория находится в области, где $N>0$, то она может, в принципе, перейти в область отрицательных значений. Поэтому неравенство (15) справедливо только для тех значений t, для которых траектория остается в области $N>0$.

Если же в начальный момент $N<0$, то траектория остается в этой области при всех t (пока она не покинет область G, в которой определена функция N).

§ 37 ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЧЕТАЕВА

Построение функции Четаева разбивается на три этапа.

I. Функция Четаева для линейных диагональных систем.

Особенно просто построение функции Четаева для систем в виде

$$\frac{dt_i}{dt} = \lambda_i z_i \qquad i = 1 \dots n \qquad (37.1)$$

В этом случае надо построить функцию Четаева для каждой из подсистем, на которые распадается диагональная система и затем сложить все эти функции.

Имеются два типа корней- действительные и комплексные.

Действительные корни

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \tag{37.2}$$

Для этой компоненты

$$N = -\frac{\lambda x^2}{2} \tag{37.3}$$

Действительно,

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda^2 x^2 \tag{37.4}$$

И, следовательно,

$$k(x) = \lambda^2 x^2 \tag{37.5}$$

Комплексные корни

При записи в действительной форме каждой паре комплексно сопряженных корней соответствует подсистема

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= pu - \omega v \\ \frac{dv}{dt} &= \omega u + pv \end{aligned}\right\} \tag{37.6}$$

Построим для этой подсистемы функцию

$$N(u,v) = -\frac{p}{2}\left(u^2 + v^2\right) \tag{37.7}$$

Дифференцируя N, получаем

$$\frac{dN}{dt} = -p\left(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt}\right) = -p^2\left(u^2 + v^2\right) \tag{37.8}$$

так как смешанные члены взаимно уничтожаются.

Следовательно,

$$K(u,v) = p^2 (u^2 + v^2) \qquad (37.9)$$

где p есть действительная часть комплексных корней

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= p + i\omega \\ \lambda^* &= p - i\omega \end{aligned}\right\} \qquad (37.10)$$

соответствующих системе (6).

Общий случай

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i \qquad 1 \leq i \leq l \qquad (37.11)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_k}{dt} &= p_k u_k - \omega_k v_k \\ \frac{dv_k}{dt} &= \omega_k u_k + p_k v_k \end{aligned}\right\} \quad 1 \leq k \leq m$$

Функция Четаева такой системы имеет вид:

$$N = -\sum_{i=1}^{l} \frac{\lambda_i x_i^2}{2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k (u_k^2 + v_k^2)}{2} \; ; \qquad (37.12)$$

а ее производная (взятая со знаком минус)

$$K = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^2 x_i^2 + \sum_{k=1}^{m} p_k^2 (u_k^2 + v_k^2) \qquad (37.13)$$

Существенно для дальнейшего неравенства, аналогичное неравенству (36.3)

$$K \geq k \left[\sum_{i=1}^{l} x_i^2 + \sum_{k=1}^{n} (u_k^2 + v_k^2) \right) \qquad (37.14)$$

где число k определяется формулой

$$k = \min_{i,k} (\lambda_i, p_k) \qquad (37.15)$$

формула (I4) соответствует (36.5) при

II. Функция Четаева для Жордановой формы

Основная идея построения видна уже на примере одной единственной жордановой клетки с действительным собственным числом:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda x_2 + x_3 \\ &\dots \\ \frac{dx_{s-1}}{dt} &= \lambda x_{s-1} + x_s \\ \frac{dx_s}{dt} &= \lambda x_s \end{aligned} \tag{37.16}$$

Проведем в этой системе замену переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 y_1 \\ x_2 &= a_2 y_2 \\ &\dots \\ x_s &= a_s y_s \end{aligned} \tag{37.17}$$

Система в переменных y приобретает вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda y_1 + \frac{a_2}{a_1} y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda y_2 + \frac{a_3}{a_2} y_3 \\ &\dots \\ \frac{dy_s}{dt} &= \lambda y_s \end{aligned}\right\} \tag{37.18}$$

если положить теперь

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \varepsilon \\ a_3 &= \varepsilon^2 \\ &\dots \\ a_s &= \varepsilon^{s-1} \end{aligned} \tag{37.19}$$

то получается система, близкая к диагональной (при малых ε)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda y_1 + \varepsilon y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \qquad \lambda y_2 + \varepsilon y_3 \\ &\ldots \\ \frac{dy_s}{dt} &= \qquad \lambda y_s \end{aligned}\right\} \tag{37.20}$$

Оказывается, что в этих переменных можно в качестве функции Четаева взять просто функцию Четаева диагональной системы

$$N = -\frac{\lambda}{2}\left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots y_s^2\right) \tag{37.21}$$

Дифференцируя по t, имеем:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda\left(y_1\frac{dy_1}{dt} + y_2\frac{dy_2}{dt} + \cdots + y_s\frac{dy_s}{dt}\right) = -\lambda\left(\lambda y_1^2 + \varepsilon y_1 y_2 + \lambda y_2^2 + \right. \tag{37.22}$$

$$\left. + \varepsilon y_2 y_3 + \cdots + \lambda y_{s-1}^2 + \varepsilon y_{s-1} y_s + \lambda y_s^2\right) = -\lambda^2\left(y_1^2 + \cdots y_s^2\right) - $$

$$-\lambda\varepsilon\left(y_1 y_2 + y_2 y_3 + \cdots + y_{s-1} y_s\right).$$

Итак,

$$k = \lambda^2\left(y_1^2 + \cdots + y_s^2\right) + \lambda\varepsilon\left(y_1 y_2 + \cdots + y_{s-1} y_s\right) \tag{37.23}$$

Если учесть известное неравенство

$$|yz| \leqslant \frac{y^2+z^2}{2}, \tag{37.24}$$

то вторую сумму в k можно оценить так:

$$y_1 y_2 + \cdots + y_{s-1} y_s \geqslant -\frac{y_1^2+y_2^2}{2} - \frac{y_2^2+y_3^2}{2} - \cdots - \frac{y_{s-1}^2+y_s^2}{2} \geqslant \tag{37.25}$$

$$\geqslant -y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_s^2$$

откуда вытекает

$$k \geqslant \left(\lambda^2 - \lambda\varepsilon\right)\left(y_1^2 + \cdots + y_s^2\right) \tag{37.26}$$

Если выбрать ε достаточно малым, например

$$\varepsilon < \frac{|\lambda|}{2}, \tag{37.27}$$

то для K получается требуемое неравенство

$$K > k^2 |y|^2 \tag{37.28}$$

III. <u>Функция Четаева в общем (нелинейном) случае</u>

Основная идея предыдущего построения допускает обобщение: Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = a(x) + \varepsilon a_1(x) \tag{37.29}$$

и пусть известно, что при $\varepsilon = 0$ "невозмущенная" система

$$\frac{dx}{dt} = a(x) \tag{37.30}$$

имеет функцию Четаева $N(x)$

$$\frac{dN}{dt} = -K(x) \tag{37.31}$$

обладающую, кроме неравенства на производную

$$K(x) > k|x|^2 \tag{37.32}$$

еще одним свойством

$$\left|\frac{dN}{dx}\right| < C|x| \tag{37.33}$$

"Возмущение" $a_1(x)$ также должно быть "не более чем линейным"

$$|a_1(x)| < C_1|x| \tag{37.34}$$

В этом случае функция Четаева "невозмущенной" системы остается, при достаточно малом "возмущении", функцией Четаева и для возмущенной системы.

Доказательство: - почти очевидно.

Найдем производную N в силу возмущенной системы (37.35)

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dN}{dx}\left[a(x) + \varepsilon a_1(x)\right],$$

Следовательно

$$\frac{dN}{dt} = -\mathcal{K}(\varepsilon) \tag{37.36}$$

где

$$\mathcal{K}(\varepsilon) = \frac{dN}{dx}\left[a(x) + \varepsilon a_1(x)\right] = \kappa + \varepsilon \frac{dN}{dx} a_1(x).$$

Из оценок (32) и (33) и (34) непосредственно получаем неравенство

$$\mathcal{K} > k|x|^2 - \varepsilon C|x| C_1|x| = (k - \varepsilon C C_1)|x|^2, \tag{37.37}$$

из которого вытекает, что при достаточно малом ε, а именно при

$$\varepsilon < \frac{k}{2 C C_1}, \tag{37.38}$$

производная остается отрицательно определенной

$$\mathcal{K} > \frac{k}{2}|x|^2. \tag{37.39}$$

Применение этой теоремы к нелинейной системе происходит согласно идее, уже обсужденной при отыскивании функции Четаева жордановой клетки.

Пусть дана система с нулевым положением равновесия

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = A^\alpha_\beta x^\beta + A^\alpha_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma + \cdots \tag{37.40}$$

Введем масштабное преобразование

$$x^\alpha = \varepsilon y^\alpha \tag{37.41}$$

Система в новых переменных может быть записана в виде

$$\frac{dy}{dt} = Ay + \varepsilon a(y) \tag{37.42}$$

где главный член линеен, а поправка начинается минимально с квадратичных членов и содержит множитель ε.

Теорема. Если у линеаризованной системы

$$\frac{dy}{dt} = Ay \tag{37.43}$$

собственные числа имеют отличные от нуля действительные части

$$Re\ \lambda \neq 0 \tag{37.44}$$

то полная система имеет функцию Четаева в некоторой окрестности стационарной точки.

Доказательство. Сначала строим функцию Четаева линейной системы, а затем подбираем ε в преобразовании (4I) настолько малым, чтобы эта функция осталась функцией Четаева в полной системе. Такой выбор ε определяет размер окрестности стационарной точки, в которой можно гарантировать существование функции Четаева.

§ 38. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ.

Задача об устойчивости движения имеет важное значение в истории науки. Вопрос о соотношении реального объекта и математической схемы сложен и не имеет формально логического решения. Теория устойчивости проверяет лишь внутреннюю состоятельность математической схемы, а не степень ее соответствия реальному объекту, что, в конечном счете, можно проверить только экспериментально.

Математически точную теорию устойчивости создал известный русский математик А.М.Ляпунов. Ему принадлежит следующее определение.

<u>Определение I. Устойчивость по Ляпунову</u>.

Положение равновесия x_0,

$$a(x_0)=0 \tag{38.I}$$

системы дифференциальных уравнений,

$$\frac{dx}{dt}=a(x) \tag{38.2}$$

называется устойчивым по Ляпунову, если для любой окрестности положения равновесия $\mathcal{U}_\varepsilon$ существует меньшая окрестность $\mathcal{U}_\delta$,

$$\mathcal{U}_\delta \subset \mathcal{U}_\varepsilon \tag{38.3}$$

такая, что любое решение, начинающееся в $\mathcal{U}_\delta$

$$x(0) \subset \mathcal{U}_\delta \tag{38.4}$$

остается внутри $\mathcal{U}_\varepsilon$,

при всех положительных значениях t,

$$t>0 \tag{38.5}$$

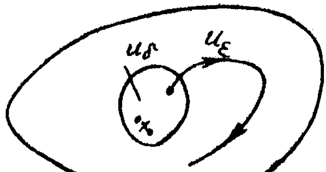


Рис. I. Устойчивость по Ляпунову.

Наглядно говоря, устойчивость по Ляпунову означает, что малое возмущение может нарушить стационарное состояние, но далеко точка уйти не может. Более того, можно обеспечить любую степень близости возмущенной траектории к стационарному состоянию, так как обьемлющую окрестность можно выбрать сколь угодно малой. Однако при этом необходимо позаботиться о "щадящем режиме" возмущений - начальный сдвиг допускается "не больше чем на δ" - начальная точка должна лежать в окрестности u_δ.

Такая устойчивость характеризует положения типа безразличного равновесия, например, шарик на слабо шероховатой горизонтальной плоскости.

Во многих других задачах встречается другой тип устойчивости, когда система активно восстанавливает равновесие, нарушенное внешним воздействием.

<u>Определение II. Асимптотическая устойчивость</u>.

Положение равновесия X_0 называется асимптотически устойчивым, если существует окрестность $\mathcal{U}_\varepsilon$ положения равновесия

$$X_0 \subset \mathcal{U}_\varepsilon \qquad (38.6)$$

такая, что любое решение,

$$x = x(t) \qquad (38.7)$$

начинающееся в этой окрестности

$$X(0) \subset \mathcal{U}_\varepsilon \tag{38.8}$$

стремится, с ростом t, к положению равновесия

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \tag{38.9}$$

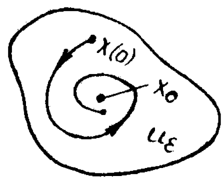


Рис. 2. Асимптотическая устойчивость.

В приложениях математики к естествознанию совершенно недостаточно бывает найти решение задачи. Если это решение, в частности, стационарное состояние, неустойчиво, то практически нет шансов на осуществление полученного решения в природе (или технике). Дело в том, что любая математическая схема связана с идеализацией, отбрасыванием каких-то связей, которые мы склонны считать несущественными. Однако эти малые поправки могут играть решающую роль, если решение идеализированной задачи окажется неустойчивым. Они приводят к срыву этого неустойчивого режима и выходу на совершенно другой, обычно неустойчивый, нередко колебательный режим. Поэтому методологически правильное решение любой задачи должно обязательно включать проверку реализуемости решения. В простейшем случае, который мы изучаем, проверка эта сводится к исследованию решения на устойчивость.

Теория устойчивости, развита Ляпуновым, позволяет сводить вопрос об устойчивости полной системы к вопросу об устойчивости линейного приближения. Однако само доказательство удобнее вести в терминах функции Четаева, которая позволяет разбирать вопрос об устойчивости и неустойчивости похожими приемами.

Достаточное условие устойчивости.

Пусть система уравнений,

$$\frac{dx}{dt} = a(x) \tag{38.10}$$

имеет стационарную точку x_0,

$$a(x_0) = 0 \tag{38.11}$$

Если линеаризованная система,

$$\frac{dy}{dt} = Ay \tag{38.12}$$

имеет матрицу A,

$$A = \left.\frac{da}{dx}\right|_{x = x_0} \tag{38.13}$$

все собственные числа которой,

$$\det |A - \lambda E| = 0 \tag{38.14}$$

лежат в левой части полуплоскости

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \tag{38.15}$$

то стационарная точка x_0 исходной системы асимптотически устойчива.

Кратко эту теорему можно сформулировать так: "Из асимптотической устойчивости линеаризованной системы вытекает асимптотическая устойчивость полной системы". Верно ли обратное утверждение?

Доказательство получается довольно простым, ибо все трудности преодолены при изучении свойств функции Четаева.

Так как действительные части собственных чисел отрицательны, то функция Четаева линеаризованной системы, существует и положительна

$$N(x, x_0) > \varkappa |x - x_0|^2 \tag{38.16}$$

Замечание. Положительно определенная функция Четаева называется функцией Ляпунова и при исследовании устойчивых систем можно было бы ограничиться понятием функции Ляпунова. Однако при изучении неустойчивых систем необходимо обобщение идеи функции Ляпунова, которым и является функция Четаева.

На основании свойств функции Четаева заключаем, что существует окрестность стационарной точки , в которой эта функция является функцией Четаева полной системы и, следовательно, экспоненциально убывает,

$$N(t) < N(0)\, e^{-\alpha t} \tag{38.17}$$

вдоль каждой траектории, начинающейся в окрестности $\mathcal{U}$. Отсюда и на основании неравенства (16) вытекает, что

$$|x - x_0| < \rho\, e^{-\frac{\alpha}{2} t} \tag{38.18}$$

и асимптотическая устойчивость доказана.

Доказанная теорема содержит указание на принципиально простой алгоритм исследования на устойчивость, хотя технические трудности могут быть значительны.

Первый этап - решение системы конечных (не дифференциальных) уравнений для отыскания стационарной точки

$$a(x_0) = 0 \tag{38.19}$$

Второй этап - вычисление матрицы A

$$A = \frac{da}{dx}\Big|_{x - x_0} \qquad (38.20)$$

Третий этап - отыскание собственных чисел,

$$det\ |A - \lambda E| = 0 \qquad (38.21)$$

тоже приводит к решению нелинейного, на этот раз обязательно алгебраического уравнения.

Если все собственные числа оказались в левой полуплоскости, система асимптотически устойчива.

Если же хотя бы одно собственное число лежит в правой полуплоскости, то система обязательно неустойчива, независимо от расположения остальных собственных чисел.

Остается, поэтому, сомнительным только случай, когда линеаризованная система имеет несколько пар чисто-мнимых корней, а все остальные лежат в левой полуплоскости. Пример, приведенный в следующем параграфе, показывает, что устойчивость в этом случае зависит существенным образом от свойств нелинейных членов.

Доказательство условия неустойчивости проводится ниже в дополнительном предположении, что система не имеет чисто мнимых корней. Это ограничение несущественно, но уточнение доказательства довольно громоздко и не содержит принципиально новый идей.

Достаточное условие неустойчивости.

Если матрица линеаризованной системы имеет хотя бы одно собственное число с положительной действительной частью, а действительные части остальных собственных чисел отличны от нуля, то система неустойчива.

Доказательство

Дополнительное ограничение (все действительные части отличны от нуля) нужно для того, чтобы непосредственно применить проведенное выше построение функции Четаева.

Рассмотрим теперь такую окрестность стационарной точки, в которой существует функция Четаева полной системы, и обозначим через ε радиус шара

$$|x - x_0| \leq \varepsilon \qquad (38.22)$$

целиком лежащего внутри этой окрестности.

Покажем, что сколь угодны близко стационарной точки найдутся траектории, покидающие с течением времени указанный шар.

Рассмотрим с этой целью произвольно малые δ и сферу такого радиуса

$$|x - x_0| = \delta \qquad (38.23)$$

Рассмотрим пересечение этой сферы с поверхностью уровня функции Четаева, соответствующего отрицательному числу

$$N(x, x_0) = N_0 < 0 \qquad (38.24)$$

Так как существует собственное число с положительной действительной частью, то такое пересечение непусто.

Функция Четаева в области отрицательности экспоненциально растет по абсолютной величине.

Поэтому

$$|N(t)| > |N_0| e^{\alpha t} \qquad (38.25)$$

Но так как

$$|N| < K |x - x_0|^2 , \qquad (38.26)$$

то из оценки (25) вытекает, что

$$|x - x_0| > c\, e^{\frac{\alpha t}{2}} \tag{38.27}$$

Достаточно, поэтому, положить

$$t = \frac{2 \ln \varepsilon}{\alpha \ln c} \tag{38.28}$$

чтобы убедиться, что по истечении этого времени траектория покидает сферу радиуса ε . Но так как начало этой траектории может быть выбрано сколь угодно близко к стационарной точке, то неустойчивость доказана.

§ 39. ПРИМЕР.

Рассмотрим систему трех уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\omega y + \beta x (x^2 + y^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = \omega x + \beta y (x^2 + y^2) \\ \dfrac{dz}{dt} = -\alpha z \end{cases} \tag{39.1}$$

Стационарная точка этой системы – начало координат

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \tag{39.2}$$

Линеаризованная система

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -\omega \eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= \omega \xi \\ \frac{d\zeta}{dt} &= -\alpha \zeta \end{aligned} \tag{39.3}$$

имеет два чисто мнимых собственных числа

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\omega \\ \lambda_2 &= -i\omega \end{aligned} \tag{39.4}$$

и одно действительное

$$\lambda_3 = -\alpha \qquad (39.5)$$

которое отрицательно при $\alpha > 0$.

Легко видеть, что первые два уравнения образуют независимую систему, которую нетрудно проинтегрировать, переходя к полярным координатам в плоскости $x\,y$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \qquad (39.6)$$

Для наших целей достаточно найти уравнение для r , которое легко получить, умножая первое уравнение на x, второе на y и складывая

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = \beta(x^2+y^2)^2 . \qquad (39.7)$$

Следовательно

$$\frac{dr}{dt} = \beta r^3 \qquad (39.8)$$

Это уравнение в разделяющихся переменных,

$$\frac{dr}{r^3} = \beta\, dt \qquad (39.9)$$

но качественное поведение проще увидеть прямо из уравнения (8).

Если $\beta > 0$, то r растет и система неустойчива.

Если же $\beta < 0$, то r стремится к нулю при любых начальных данных.

Этот пример показывает, что из устойчивости по Ляпунову линеаризованной системы не вытекает никаких следствий относительно полной системы.

В нашем примере линеаризованная система устойчива по Ляпунову независимо от

Полная же система может оказаться и асимптотически устойчивой и устойчивой по Ляпунову (только при β равно нулю) и неустойчивой в зависимости от величины β .

Задача.

Полная система может быть:

1. Асимптотически устойчивой.
2. Устойчивой по Ляпунову.
3. Неустойчивой.

Линеаризованная система также может быть любого из трех типов. Формально логически возможно девять ситуаций

$$(\Pi_i , \lambda_k)$$

где, например, символ (Π_1, λ_2) означает, что полная система асимптотически устойчива, а линеаризованная устойчива по Ляпунову.

Перебрать все случаи и указать, какие из них возможны.

ГЛАВА VI. ОКРЕСТНОСТЬ РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

§ 40. ПАРАМЕТРЫ. ОКРЕСТНОСТЬ РЕШЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ.

До сих пор шла речь об одном (векторном) уравнении,

$$\frac{dx}{dt} = a(x) \qquad (40.1)$$

Однако в приложениях чаще встречаются семейства однотипных уравнений,

$$\frac{dx}{dt} = a(x, \alpha) \qquad (40.2)$$

правые части которых зависят не только от вектора x, но и от нескольких других переменных (вектора α), которые принято называть параметрами.

Теорема существования (и теорема единственности) решения справедлива и для семейств уравнений (2). Решение

$$x = f(t, \xi, \alpha) \qquad (40.3)$$

зависит уже не только от времени t и начальных данных ξ,

$$\xi \equiv f(0, \xi, \alpha) \qquad (40.4)$$

но и от параметра α. Метод доказательства, как и раньше состоит в переходе к эквивалентному интегральному уравнению

$$x = \xi + \int_0^t a(x, \alpha)\,d\tau \qquad (40.5)$$

Применяя затем метод последовательности приближений Пикара:

$$\left.\begin{aligned} f_{n+1}(t, \xi, \alpha) &= \xi + \int_0^t a(f_n(\tau, \xi, \alpha), \alpha)\,d\tau \\ f_0(t, \xi, \alpha) &= \xi \end{aligned}\right\} \qquad (40.6)$$

можно построить решение

$$f(t,\xi,\alpha)=\lim_{n\to\infty} f_n(t,\xi,\alpha) \qquad (40.7)$$

точно так же, как и для одного векторного уравнения. Это решение оказывается непрерывной функцией параметра α, если правая часть $a(x,\alpha)$ непрерывно зависела от него. Доказательство этого факта очень просто и основано на теореме анализа о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Однако громоздкость доказательства ставит его за пределы курса.

В приложениях недостаточно бывает знать, что небольшое изменение параметров, значения которых (например, масса маятника, или емкость конденсатора) всегда известны лишь приблизительно, мало изменит решение.
Необходимы более точные, количественные сведения. Такие сведения можно получить, придавая параметру α малое приращение $\Delta\alpha$ ("вариация") и оценивая изменение решения

$$f(t,\xi,\alpha+\Delta\alpha)\approx f(t,\xi,\alpha)+\frac{\partial f}{\partial\alpha}\Delta\alpha \qquad (40.8)$$

Вопрос поэтому сводится к вычислению частной производной

$$Y=\frac{\partial f}{\partial\alpha} \qquad (40.9)$$

Отметим уже сейчас, что Y является матрицей, у которой число строк равно размерности вектора x, а число столбцов равно количеству компонент вектора (параметра) α:

$$Y=\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial f^1}{\partial\alpha_2} & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial\alpha_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^n}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial f^n}{\partial\alpha_2} & \ldots & \frac{\partial f^n}{\partial\alpha_m} \end{pmatrix} \qquad (40.10)$$

По старинной традиции приращение параметра α называют "вариацией", а дифференцирование по параметру "варьированием". Эта терминология удобна для того, чтобы отличать параметр от переменной, однако следует иметь в виду, что варьирование ничем, принципиально, не отличается от дифференцирования. Следует также отличать варьирование параметра от аналогичного термина в вариационном исчислении. Подробнее об этом будет сказано в главе, посвященной вариационному исчислению.

Отыскание матрицы Y сводится, как мы сейчас увидим, к интегрированию системы уравнений. Эту систему нетрудно получить, дифференцируя формулу (6) по параметру α. Обозначая через Y_n производную от n-го приближения

$$Y_n = \frac{\partial f_n}{\partial \alpha} \tag{40.11}$$

получаем

$$Y_{n+1} = \int_0^t \left[\frac{\partial a}{\partial x} Y_n + \frac{\partial a}{\partial \alpha}\right] d\tau \tag{40.12}$$

Предполагая непрерывную дифференцируемость функции $a(x, \alpha)$ по переменному x и по параметру α, можно доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\partial f_n}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\lim_{n \to \infty} \frac{\partial f_n}{\partial \alpha}\right]. \tag{40.13}$$

Детали доказательства мы опускаем, подчеркнув, впрочем, что решающую роль играют две теоремы анализа - теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла и теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда.

С учетом сказанного для матрицы Y получается, предельным переходом из (I2), следующее уравнение,

$$Y(t,\xi,\alpha)=\int_0^t\left[\frac{\partial a}{\partial x}Y+\frac{\partial a}{\partial \alpha}\right]d\tau \qquad (40.14)$$

которое эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\frac{dY}{dt}=\frac{\partial a}{\partial x}Y+\frac{\partial a}{\partial \alpha}. \qquad (40.15)$$

Это уравнение обычно называют "уравнением в вариациях" относительно исходного уравнения.

Особенно подчеркнем, что оно может быть получено формальным дифференцированием уравнения (2) по параметру α в предположении перестановочности дифференцирования по α и дифференцирования вдоль траектории

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{d}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \alpha}. \qquad (40.16)$$

Это последнее соотношение есть не что иное, как теорема о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования.

Получившееся весьма простое истолкование "уравнения в вариациях" становится тем более понятным, если учесть, что само урав нение (2) следовало бы записывать в виде,

$$\frac{\partial x}{\partial t}=a(x,\alpha) \qquad (40.17)$$

Действительно, решение этого уравнения

$$x=f(t,\xi,\alpha) \qquad (40.18)$$

является векторной функцией одного скалярного и двух векторных аргументов, итого $1+m+n$ скалярных переменных. Поэтому полная производная этой функции есть матрица

$$\frac{df}{d\begin{pmatrix}t\\ \xi\\ \alpha\end{pmatrix}}=\left(\frac{\partial f}{\partial t},\ \frac{\partial f}{\partial \xi},\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) \qquad (40.19)$$

имеющая n строк и $n+m+1$ столбец.

Однако для того чтобы подчеркнуть фиксированность переменных ξ и α вдоль каждой траектории, мы сохраним обозначение полной производной

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (40.20)$$

для частной производной по времени.

Для частных производных по ξ и по α мы будем употреблять разные обозначения.

Для α сохраним уже введенное обозначение

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = Y \qquad (40.21)$$

а для производной по начальным данным введем стационарное обозначение

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = S \qquad (40.22)$$

Матрица S является всегда квадратной матрицей, так как вектор начальных данных ξ имеет ту же размерность, более того является вектором того же пространства, что и x. Эта матрица обращается в единичную при $t=0$

$$S\,(0, \xi, \alpha) \equiv E \qquad (40.23)$$

что вытекает из формулы (4) и (22).

Матрица S также удовлетворяет уравнению в вариациях, вполне аналогичному (I5):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial a}{\partial x}\, S \qquad (40.24)$$

но уже однородному, так как функция a зависит от параметра α и независит от начальных данных.

В заключение еще раз напомним смысл матриц Y и S.

Матрица Y показывает сдвиг решения при изменении параметра α, а матрица S дает сдвиг решения при изменении начальных данных. Полный сдвиг дается приближенной формулой

$$\Delta x \approx \delta x = Y \Delta \alpha + S \Delta \xi \tag{40.25}$$

Уравнения в вариациях проще всего получить, дифференцируя по α и ξ соответственно уравнению для решения f

$$\frac{\partial f(t,\xi,\alpha)}{\partial t} = a(f(t,\xi,\alpha),\alpha) \tag{40.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial a}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial a}{\partial \alpha} \tag{40.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial a}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) \tag{40.28}$$

Однако такой простой вывод опирается на предположение существования смешанных производных, стоящих в левой части равенств, а именно в доказательстве их существования, которое мы опускаем, и заключена основная трудность проблемы.

Основной вывод параграфа состоит в том, что изучение окрестности данного решения сводится к изучению линейной системы уравнений,

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + B(t) \tag{40.29}$$

Здесь $A(t)$ - квадратная матрица производных

$$A(t) = \frac{\partial a}{\partial x}\Big|_{x = x(t)} \tag{40.30}$$

от правой части по независимому переменному x с подстановкой вместо аргумента изучаемого решения

$$x = \overset{\circ}{x}(t) \tag{40.31}$$

Матрица $b(t)$ -прямоугольная матрица производных по параметру

$$b(t) = \frac{\partial a}{\partial \alpha}\Big|_{x = x(t)} \qquad (40.32)$$

имеет такие же размеры, как и матрица Y и может, в частности, состоять из одного столбца, если параметр α имеет только одну компоненту.

<u>Замечание</u>. Если параметр α имеет m компонент, то матричная система (29) распадается на m независимых векторных систем.

Действительно, в правой части системы (29) стоит произведение квадратной матрицы A на прямоугольную матрицу Y . Правило умножения матриц ("строка слева на столбец справа") можно графически изобразить следующим образом:

$$AY = A(Y_1)(Y_2)\cdots(Y_m) = (AY_1)(AY_2)\cdots(AY_m) \qquad (40.33)$$

так как i -ый столбец произведения содержит все элементы левой матрицы (A) и только элементы i -ого столбца правого множителя (Y). Матрицу производных также можно разбить на столбцы

$$\frac{dY}{dt} = \left(\frac{dY_1}{dt}\right)\cdots\left(\frac{dY_m}{dt}\right) \qquad (40.34)$$

так как дифференцирование матриц происходит вообще покомпонентно.

Поэтому окончательно получается, что одно матричное уравнение есть просто весьма удобная сокращенная запись системы m векторных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= AY_1 + b_1 \\ \frac{dY_2}{dt} &= AY_2 + b_2 \\ &\cdots\cdots \\ \frac{dY_m}{dt} &= AY_m + b_m \end{aligned} \qquad (40.35)$$

которую можно записать так:

$$\frac{d}{dt}\Big(\big[Y_1\big]\big[Y_2\big]\cdots\big(Y_m\big)\Big)=\Big(\big(A\big)\Big)\Big(\big[Y_1\big]\big[Y_2\big]\cdots\big(Y_m\big)\Big)+\Big(\big[b_1\big]\big[b_2\big]\cdots\big[b_m\big]\Big) \tag{40.36}$$

или, если не отмечать границ между столбцами

$$\frac{d}{dt}\big((Y)\big)=\big((A)\big)\big((Y)\big)+\big((b)\big). \tag{40.37}$$

§ 41. УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.

Теорема существования для общего случая использует условие Липшица для правых частей. Это условие автоматически выполнено для линейных систем

$$\frac{dY}{dt}=AY+b \tag{41.1}$$

так как правая часть

$$B(Y,t)=A(t)Y+b(t) \tag{41.2}$$

линейной системы дифференцируема по искомой функции

$$\frac{\partial B}{\partial Y}=A \tag{41.3}$$

и производная совпадает с матрицей коэффициентов линейной системы.

Это замечание позволяет сформулировать теорему существования для линейных систем "в целом".

Теорема.

Если линейная система

$$\frac{dY}{dt}=A(t)Y+b(t) \tag{41.4}$$

имеет на интервале $t_1 < t < t_2$ непрерывные коэффициенты, то решение

$$Y=Y(t) \tag{41.5}$$

существует на всем интервале $t_1 < t < t_2$. Верхний или нижний предел и даже оба могут быть бесконечными.

Доказательство.

Запишем итерационный метод Пикара для системы (4)

$$Y_{n+1}(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} [A(\tau) Y_n(\tau) + b(\tau)] d\tau \qquad (41.6)$$

$$Y_0(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau) d\tau \qquad (41.7)$$

и рассмотрим любой внутренний отрезок интервала (t_1, t_2) содержащий точку t_0

$$t_1 < T_1 \leq t_0 \leq T_2 < t_2 \qquad (41.8)$$

На каждом таком отрезке функции $A(t)$ и $b(t)$ непрерывны и, в частности, ограничены:

$$|A(t)| \leq A \qquad (41.9)$$

$$|b(t)| \leq b \qquad (41.10)$$

Мажорирующий ряд строится совершенно так же, как и в общем случае. Вводим разность двух последовательных приближений

$$\Delta_{n+1}(t) = Y_{n+1}(t) - Y_n(t) \qquad (41.11)$$

По сравнению с общим случаем имеет место упрощение, состоящее в том, что разности выражаются друг через друга точно:

$$\Delta_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau) \Delta_n(\tau) d\tau \qquad (41.12)$$

Снова вводим мажорирующую последовательность,

$$m_{n+1}(t) = A \int_{t_0}^{t} m_n(\tau) d\tau \qquad (41.13)$$

и подбираем m_1 так, чтобы было выполнено неравенство

$$|\Delta_1(t)| \leq m_1(t) \qquad (41.14)$$

Прямой проверкой нетрудно убедиться, что в качестве $m_1(t)$ можно выбирать функцию

$$m_1(t) = A\,|Y_0|\,(t-t_0) \tag{41.15}$$

Все оценки ведутся на правой части отрезка

$$t_0 \leq t \leq T_2 \tag{41.16}$$

Оценки слева вполне аналогичны.

Указанный выбор $m_1(t)$ позволяет вычислить все члены мажорирующего ряда

$$m_n(t) = |Y_0|\,\frac{A^n(t-t_0)^n}{n!} \tag{41.17}$$

Ряд оказывается сходящимся при всех t и равномерно сходящимся на отрезке (16). Из формулы (12) методом индукции доказываем, что

$$|\Delta_n(t)| \leq m_n(t) \tag{41.18}$$

для всех n. В самом деле, при $n=1$ это вытекает из (14). Предположим теперь, что неравенство выполнено для всех n, не превосходящих некоторого и докажем его для $n+1$. Из (12) оцениваем

$$|\Delta_{n+1}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |A(\tau)\Delta_n(\tau)|\,d\tau \leq \int_{t_0}^{t} A\,|\Delta_n(\tau)|\,d\tau$$

на основании (41.9). Затем

$$|\Delta_{n+1}(t)| \leq A\int_{t_0}^{t} m_n(\tau)\,d\tau$$

на основании индуктивного предположения. Наконец

$$|\Delta_{n+1}(t)| \leq m_{n+1}(t)$$

на основании рекурентного соотношения (13), определяющего мажорирующий ряд.

Итак, теорема доказана и решение существует и ограничено на каждом внутреннем отрезке интервала (t_1, t_2).

Задача. Доказать, что решение существует, если функция $b(t)$ всего лишь абсолютно интегрируемая

$$\int_{t_1}^{t_2} |b(\tau)|\,d\tau < +\infty$$

Можно ли ослабить это предположение? Как?

§ 42. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ.

Решение линейной неоднородной системы

$$\frac{dY}{dt} = AY + b(t) \tag{42.1}$$

существенно упрощает один замечательный прием, позволяющий свести задачу к значительно более простой - однородной системе

$$\frac{dS}{dt} = A(t)\,S \tag{42.2}$$

для квадратной матрицы S и к стандартной задаче Коши,

$$S(t_0) = E \tag{42.3}$$

где E - единичная квадратная матрица.

Итак предположим, что решение системы (2) известно

$$S = S(t) \tag{42.4}$$

и поставим задачу отыскания решения системы (I) с начальными данными

$$Y(t_0) = Y_0 \tag{42.5}$$

Решение будем искать в виде

$$Y(t) = S(t)\,Z(t) \tag{42.6}$$

где $Z(t)$ - прямоугольная матрица, такая же как Y. (Обратить внимание на порядок множителей! Для матриц он возможен только один). Подставим (6) в (I) учитывая, что

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dS}{dt} z + S \frac{dz}{dt} \tag{42.7}$$

(следить за порядком множителей)

$$\frac{dS}{dt} z + S \frac{dz}{dt} = A S z + b \tag{42.8}$$

Так как S удовлетворяет уравнению (2), то первый член слева взаимноуничтожается (при любой z !) с первым членом справа. Остается уравнение

$$S \frac{dz}{dt} = b \tag{42.9}$$

в котором неизвестной являются только матрица Z. Умножая обе части равенства на S^{-1} слева, получаем

$$\frac{dz}{dt} = S^{-1} b \tag{42.10}$$

откуда находим решение

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} S^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau \tag{42.11}$$

и после подстановки в формулу (6) искомое решение системы (I)

$$Y(t) = S(t) z_0 + \int_{t_0}^{t} S(t) S^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau \tag{42.12}$$

Остается удовлетворить начальным данным. Подставляя $t = t_0$ в формулу (12) получаем, используя начальные данные для $S(t_0) = E$

$$Y(t_0) = z_0 \tag{42.13}$$

Окончательно искомое решение имеет вид:

$$Y(t) = S(t) Y_0 + \int_{t_0}^{t} S(t) S^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau \tag{42.14}$$

Полученный результат содержит, в частности, теорему о связи решений однородного уравнения и неоднородного.

Общее решение (удовлетворяющее произвольным начальным данным) неоднородного уравнения есть сумма общего (в том же смысле) решения однородного уравнения и частного решения (в нашем случае удовлетворяющего даже нулевым начальным данным) неоднородного уравнения.

Эту теорему можно, конечно, доказать и непосредственно, но изложенный способ дает метод построения частного решения, концентрируя принципиальные трудности в изучении однородной системы.

Квадратная матрица $S(t)$ называется фундаментальной матрицей системы.

Формула (I4) показывает, что знание $S(t)$ сводит решение к серии квадратур. Однако та же формула указывает на существенный пробел в проведенном построении. Эта формула имеет смысл только тогда, когда матрица при всех t имеет обратную. В следующем параграфе будет доказана замечательная теорема об определителе Вронского, из которой, в частности, вытекает и существование обратной у фундаментальной матрицы системы.

§ 43. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВРОНСКОГО. ФОРМУЛА ЛИУВИЛЛЯ.

Хотя главной целью параграфа является изучение определителя Вронского

$$W(t) = \det S(t), \qquad (43.1)$$

изложение существенно упрощается, если поставить задачу несколько шире.

A. Рассмотрим скалярную функцию k переменных векторов $x_1, \ldots, x_k$

(43.2)

Эта функция называется полилинейной (тензором), если она линейна по каждому из своих аргументов

$$T\left(z_1, \ldots, \alpha' z_i' + \alpha'' z_i'', \ldots z_k\right) = \alpha' T(z_1, \ldots, z_i', \ldots z_k) + \alpha'' T(z_1, \ldots z_i'', \ldots z_k) \tag{43.3}$$

Предположим далее, что все аргументы функции являются в свою очередь функциями t. Вычислим производную получившейся сложной функции t.

$$T(t+\Delta t) - T(t) = T\left(z_1 + \Delta z_1, \ldots, z_k + \Delta z_k\right) - T\left(z_1, \cdots z_k\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left[\begin{matrix} T\left(z_1, \cdots z_{i-1},\ z_i + \Delta z_i,\ z_{i+1} + \Delta z_{i+1}, \cdots z_k + \Delta z_k\right) \\ - T\left(z_1, \ldots z_{i-1},\ z_i,\ z_{i+1} + \Delta z_{i+1}, \cdots z_k + \Delta z_k\right) \end{matrix}\right] = \tag{43.4}$$
$$= \sum_{i=1}^{k} T\left(z_1, \ldots, z_{i-1}, \Delta z_i,\ z_{i+1} + \Delta z_{i+1}, \ldots, z_k + \Delta z_k\right).$$

Разделив на Δt обе части полученного равенства и внося $(\Delta t)^{-1}$ на основании линейности под знак функции T, имеем:

$$\frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{k} T\left(z_1, \ldots, z_{i-1}, \frac{\Delta z_i}{\Delta t};\ z_{i+1} + \Delta z_{i+1}, \ldots z_k + \Delta z_k\right) \tag{43.5}$$

Переходя к пределу (предполагая конечно, дифференцируемость функции z_i по t), получим формулу,

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{k} T\left(z_1, \ldots, z_{i-1}, \frac{dz_i}{dt}, z_{i+1}, \cdots, z_k\right) \tag{43.6}$$

которая является обобщением правила дифференцирования произведения. Запишем эту формулу в таком виде, когда это особенно ясно:

$$\frac{d}{dt} T\left(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_k\right) = \sum_{i=1}^{i=k} T\left(z_1, \ldots \frac{dz_i}{dt}, \ldots z_k\right). \tag{43.7}$$

B) Рассмотрим теперь фундаментальную матрицу системы

$$\frac{dS}{dt} = AS \tag{43.8}$$

и будем ее считать набором строк z_i

$$S = \begin{pmatrix} \overline{\underline{\quad z_1 \quad}} \\ \overline{\underline{\quad z_2 \quad}} \\ \vdots \\ \overline{\underline{\quad z_n \quad}} \end{pmatrix} \qquad (43.9)$$

Это, как будет видно ниже, весьма существенная идея. До сих пор мы рассматривали S как набор столбцов, и тогда система (8) распадалась на n независимых систем.

Теперь же мы поступаем, казалось бы, совершенно неразумно, отказываясь от этого "естественного" "упрощения" задачи. Оказывается, что в интересующем нас вопросе об определителе разумной является именно точка зрения всей матрицы S , а не отдельных столбцов.

Выпишем теперь формулы, определяющие элементы произведения матриц A и S

$$B_\beta^\alpha = A_\gamma^\alpha S_\beta^\gamma \qquad (43.10)$$

Так как мы хотим рассматривать строки произведения, то мы должны фиксировать верхний индекс.

Так, например, элементы первой строки произведения образуют вектор с элементами

$$B_\beta^1 = A_\gamma^1 S_\beta^\gamma \qquad (43.11)$$

Таким образом строка B^1 есть линейная комбинация строк z^γ с коэффициентами A_γ^1

$$B^1 = A_1^1 z^1 + A_2^1 z^2 + \cdots + A_n^1 z^n \qquad (43.12)$$

Поэтому систему (8) можно записать следующим образом:

$$\frac{dz^1}{dt} = A^1_1 z^1 + A^1_2 z^2 + \dots + A^1_n z^n$$

$$\frac{dz^2}{dt} = A^2_1 z^1 + A^2_2 z^2_2 + \dots + A^2_n z^n$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{dz^n}{dt} = A^n_1 z^1 + A^n_2 z^2 + \dots + A^n_n z^n \tag{43.13}$$

Во избежание путаницы подчеркнем, что z^α это не элемент вектора, а строка матрицы S

$$S = \begin{pmatrix} \vdots \\ \overbrace{\underbrace{\quad z^\alpha \quad}} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{43.14}$$

Верхний индекс у z^α появился потому, что матрица S составлена из своих строк совершенно аналогично тому, как вектор-столбец из своих элементов.

С. Уравнение для определителя Вронского.

Рассмотрим теперь определитель матрицы S как полилинейную функцию ее строк. (Доказать!)

$$W(t) = T(z^1, \dots, z^n) \tag{43.15}$$

Воспользуемся правилом дифференцирования "произведения" и найдем производную Вронскиана:

$$\frac{dW}{dt} = T\left(\frac{dz^1}{dt}, \dots, z^i, \dots, z^n\right) + \dots + \\ + T\left(z^1, \frac{dz^i}{dt}, \dots, z^n\right) + \dots + T\left(z^1, \dots z^i, \frac{dz^n}{dt}\right) \tag{43.16}$$

Подставим выражение для производной из формулы (13) в "типичное" слагаемое:

$$T\left(z^1 \dots \frac{dz^i}{dt}, \dots, z^n\right) = T(z^1, \dots, A^i_1 z^1 + \dots + A^i_l z^l + \\ + \dots + A^i_n z^n, \dots z^n) = A^i_1 T(z^1, \dots, z^i, \dots z^n) + \dots + \tag{43.17} \\ + A^i_i T(z^1, \dots, z^i, \dots, z^n) + \dots + A^i_n T(z^1, \dots, z^n, \dots z^n)$$

Каждое из этих слагаемых есть детерминат, составленный из строк, указанных в качестве аргументов функции T. Поэтому во всей формуле (I7) может отличаться от нуля только один член, диагональный,

$$T\left(z^1,\ldots,\frac{dz^i}{dt},\ldots,z^n\right)=A_i^i\,T\left(z^1,\ldots,z^i,\ldots z^n\right) \tag{43.18}$$

так как во всех остальных определителях обязательно есть две одинаковые строки.

Но так как,

$$T\left(z^1,\ldots,z^i,\ldots z^n\right)=W(t) \tag{43.19}$$

то, подставляя (I8) и (I9) в формулу (I6) получаем

$$\frac{dW}{dt}=\left[A_1^1(t)+\cdots+A_n^n(t)\right]W \tag{43.20}$$

Этот замечательный вывод позволяет найти в явной форме величину определителя Вронского, не интегрируя всей системы:

$$W(t)=W(t_0)\,e^{\int_{t_0}^{t}\left[A_1^1(\tau)+\cdots+A_n^n(\tau)\right]d\tau} \tag{43.21}$$

Полученная формула носит название формулы Лиувилля и выражает значение Вронскиана через интеграл от суммы диагональных элементов - следа матрицы коэффициентов системы.

Отсюда на основании теоремы единственности, вытекает, в частности, обоснование метода вариации начальных данных, рассмотренного в предыдущем параграфе.

В самом деле, если

$$W(t_0)\neq 0 \tag{43.22}$$

то при всех значениях t выполнено неравенство,

$$\det S=W(t)\neq 0 \tag{43.23}$$

гарантирующее существование обратной к фундаментальной матрице системы, так как в начальной точке матрицы S единична, и

$$W(t_0) = \det S(t_0) = \det E = 1 \neq 0 \qquad (43.24)$$

Верно, конечно, и обратное утверждение.

Если $W(t)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке,

$$W(t_0) = 0 \qquad (43.25)$$

то $W(t)$ - тождественный нуль

$$W(t) \equiv 0 \qquad (43.26)$$

Таким образом необходимое и достаточное условие линейной независимости системы решений состоит в том, что определитель Вронского этой системы отличен от нуля хотя бы в одной точке.

ГЛАВА УП ОКРЕСТНОСТЬ ОСОБОЙ ЛИНИИ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО.

§ 44. ДИСКРИМИНАНТНАЯ КРИВАЯ

Дифференциальные уравнения не всегда появляются из задач естествознания в канонической форме. Часто из физических соображений получается просто связь,

$$f(x, y, y') = 0, \tag{44.1}$$

между независимым переменным x, искомой функцией y и производной y'. Поэтому задаче теории дифференциальных уравнений предшествует задача анализа об отыскании корня,

$$y' = a(x, y) \tag{44.2}$$

уравнения, которое в процессе отыскания этого корня следует рассматривать не как дифференциальное а как обычное, дающее функциональную связь между тремя независимыми переменными.

$$f(x, y, z) = 0 \tag{44.3}$$

Обозначение

$$y' = z \tag{44.4}$$

должно подчеркнуть равноправие (только на время отыскания корня) переменной z с остальными двумя.

С точки зрения анализа одно соотношение, связывающее три переменных, задает поверхность в трехмерном пространстве. Так как мы хотим найти именно z как функцию от Х и У, то на этой поверхности особую роль будет играть геометрическое место точек, в которых касательная плоскость вертикальна.

В точках этой линии одновременно выполнены два соотношения

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z)=0 \\ \frac{df}{dz}(x,y,z)=0 \end{aligned}\right\}, \qquad (44.5)$$

означающие принадлежность точки поверхности и вертикальность касательной плоскости.

Проекция этой линии на плоскость ХУ называется дискриминантной кривой. В окрестности этой линии, вообще говоря, невозможно найти z как функцию X и У.

Особая линия является "краем" поверхности, и с одной стороны от дискриминантной кривой уравнение

$$f(x,y,z)=0 \qquad (44.6)$$

имеет два корня, а с другой стороны ни одного.

Это легко видно на простейшем примере,

$$x^2+y^2+z^2=1, \qquad (44.7)$$

дискриминантной линией которого является окружность

$$x^2+y^2=1. \qquad (44.8)$$

В общем случае оказывается возможным довольно полное исследование явлений, возникающих вблизи особой линии.

Однако перед тем, как двинуться дальше в чисто математическом плане, необходимы предварительные методологические соображения. Все предыдущее изложение основывалось неявно на "принципе общего положения". Не существует, по-видимому, общей формулировки этого принципа. Для наших целей достаточно предположения, что мешающие (чему-нибудь) соотношения типа равенства попадаются так редко, что такой опасностью можно пренебречь.

Так, например, до сих пор мы очитаем, что уравнения всегда разрешимы относительно производной и пренебрегали возможностью выполнения равенства

$$\frac{df}{dz}=0$$

Сейчас мы выясним, что исключительные точки образуют линию на плоскости, т.е. явно ничтожное меньшинство.

После того, как поставлена задача изучить именно эти точки, мы должны, разумеется, учесть это равенство. Однако "принцип общего положения" обязывает нас предполагать, что больше никаких дополнительных особенностей в задаче нет. Иными словами "принцип общего положения" предписывает изучить сначала то, что имеет место в большинстве случаев и лишь затем переходить к случаям особой сложности- "вырожденным", как их часто называют в математике.

В нашей задаче это означает, что особую линию следует считать гладкой пространственной линией, на которой можно любую из переменных x, y или z выбрать в качестве параметра. Можно, разумеется, параметризовать еще как-нибудь. Например, взять в качестве параметра длину дуги или угол с осью x. Для наших целей наиболее удобным параметром является переменное z.

Итак, кривая

$$\begin{aligned} x &= x_0(z) \\ y &= y_0(z) \\ z &= z \end{aligned} \qquad (44.9)$$

является решением системы уравнений (5).

Вблизи этой кривой уравнение (3) можно приближенно заменить линейным соотношением

$$\frac{df}{dx}(x-x_0)+\frac{df}{dy}(y-y_0)+\frac{df}{dz}(z-z_0)=C \qquad (44.10)$$

Вдоль осооой кривой производная по z равна нулю. Поэтому уравнение (10) можно записать в виде,

$$a(z)x + b(z)y + c(z) = 0 \qquad (44.11)$$

Подставляя вместо z его значение y', получаем дифференциальное уравнение

$$a(y')x + b(y')y + c(y') = 0 \qquad (44.12)$$

Это уравнение - линейное по x и y и нелинейное по производной y' - называется уравнением Лагранжа.

Обычно такое уравнение записывается в виде

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \qquad (44.13)$$

Для того, чтобы получить (13) из (12) необходимо, разумеется, предположить, что

$$b(y') \neq 0 \qquad (44.14)$$

Переход от (12) к (13)- еще одна иллюстрация к "принципу общего положения". В "большинстве случаев" функция $b(y')$будет отлична от нуля и тогда эти два уравнения равносильны.

Может, конечно, встретиться ситуация, в которой $b(y')$обращается в нуль, или, даже, тождественно равна нулю. Однако это случаи более редкие и выходят за рамки курса.

§ 45 <u>УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА</u>

В предыдущем параграфе было выяснено значение уравнения Лагранжа

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \qquad (45.1)$$

Это значение состоит в том, что любое уравнение вблизи дискриминантной линии устроено (в главном члене) как уравнение Лагранжа.

Покажем, что уравнение Лагранжа допускает интегрирование в квадратурах. Стоит заметить, что это довольно общая ситуация. Уравнения, сводимые к квадратурам, чаще всего связаны с какими-нибудь особенностями общих уравнений.

Можно усмотреть в этом случае проявление любопытного "принципа двойственности", своеобразное "разделение труда" между человеком и вычислительной машиной. Особенности, обыкновенно, невозможно сосчитать прямо- всякая особенность так или иначе связана с "сокращением знаков". Зато человек может найти асимптотику, которая, обычно, интегрируема в квадратурах.

Наоборот, общий случай, неприводимый к квадратурам, чаще всего требует "всего лишь" огромной вычислительной работы, но не содержит принципиальных трудностей.

Уравнение (I) запишем в виде системы, вводя традиционное обозначение

$$y' = p \tag{45.2}$$

Итак,

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(p)x + \psi(p) \\ dy &= p\,dx \end{aligned}\right\} \tag{45.3}$$

Система (3), записанная в дифференциалах, содержит принципиально новый момент. Мы не считаем больше x независимым переменным. В этой системе выбор независимого переменного не предопределен. Система шире исходного уравнения и равносильна ему на любом участке решения, на котором является монотонной функцией нового аргумента.

Выберем в качестве нового переменного p . Тогда система (3) может быть записана в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dp} &= p\,\frac{dx}{dp} \\ y &= \varphi(p)x + \psi(p) \end{aligned}\right\} \qquad (45.4)$$

Из этой системы вытекает уравнение для x , которое можно получить, дифференцируя второе уравнение и исключая $\frac{dy}{dp}$ из системы

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = \varphi'(p)x + \psi'(p) \qquad (45.5)$$

получилось линейное уравнение относительно x , решение которого сводится к двум квадратурам

$$x(p) = C\,e^{\int_{p_0}^{p}\frac{\varphi'(q)\,dq}{q-\varphi(q)}} + \int_{p_0}^{p}\frac{\psi'(q)}{q-\varphi(q)}\,e^{\int_{q}^{p}\frac{\varphi'(r)}{r-\varphi(r)}dr}\,dq \qquad (45.6)$$

Обычно не используют готовую формулу (6), а проводят выкладки заново. Алгоритм вычислений запоминать значительно легче, чем окончательный результат, а труда тратится немногим больше.

Если X известен, то У находится по формуле

$$y = \varphi(p)x + \psi(p) \qquad (45.7)$$

Задача. Показать, что У можно получить интегрированием соотношения $\qquad \frac{dy}{dp} = p\frac{dx}{dp}$

если выбрать константу интегрирования надлежащим образом.

Как именно?

§ 46 "ВЫРОЖДЕННЫЙ" СЛУЧАЙ. УРАВНЕНИЕ КЛЕРО

Приведенный в предыдущем параграфе прием интегрирования оказывается неприменимым, если

$$\varphi(p) \equiv p\,, \qquad (46.1)$$

так как получается для X не дифференциальное уравнение, а конечное соотношение

$$\varphi'(p)x + \psi(p) = 0 \qquad (46.2)$$

Это соотношение вместе с формулой (45.7)

$$y = px + \psi(p) \qquad (46.3)$$

дает параметрическое представление одной -единственной кривой, а не однопараметрического семейства кривых, как это должно быть при интегрировании дифференциальных уравнений. Возникает вопрос, каким образом исчезло это семейство.

Проведем выкладки, приводящие к исключению У из системы уравнений более общим образом.

Итак, рассматриваем снова систему (45.3)

$$y = \varphi(p)x + \psi(p) \qquad (46.4)$$
$$dy = p\,dx$$

Введем в качестве независимого переменного некоторую величину ξ, не выбирая пока его более конкретно

$$y = \varphi(p)x + \psi(p) \qquad (46.5)$$
$$\frac{dy}{d\xi} = p\,\frac{dx}{d\xi}$$

Снова исключим У из системы, дифференцируя первое уравнение по ξ. Получится, как и раньше, одно уравнение для Х,

$$[p-\varphi(p)]\frac{dx}{d\xi} = [\varphi'(p)x + \varphi'(p)]\frac{dp}{d\xi} \tag{46.6}$$

Это уравнение содержит два неизвестных, $\frac{dx}{d\xi}$ и $\frac{dp}{d\xi}$, поэтому для получения полной системы необходимо дописать еще одно уравнение. Мы вправе сделать это произвольным образом, но так чтобы получились независимые уравнения. Традиционный выбор параметра

$$\xi = p \tag{46.7}$$

равносилен дописыванию уравнения

$$\frac{dp}{d\xi} = 1 \tag{46.8}$$

Этот метод не годится, однако, для случая уравнения Клеро.

Более общий метод состоит в том, чтобы "избавиться от знаменателя", полагая

$$\frac{dp}{d\xi} = p - \varphi(p) \tag{46.9}$$

Из уравнения (6) вытекает тогда, что

$$\frac{dx}{d\xi} = \varphi'(p)x + \varphi'(p), \tag{46.10}$$

а У находится по формуле

$$y = \varphi(p)x + \varphi(p) \tag{46.11}$$

Полученная система уравнений эквивалентна уравнению Лагранжа (45.1) на каждом участке монотонности функции $x(\xi)$. Она приводит к иной параметризации решений, нежели обычный выбор $\xi = p$. Иногда эта параметризация оказывается даже более удобной.

Однако главное достоинство изложенного метода состоит в том, что он автоматически дает ответ в случае уравнения Клеро. Действительно, в этом случае, когда

$$\varphi(p) = p$$

система (9), (10), (II) превращается в следующую систему

$$\frac{dp}{d\xi} = 0 \qquad (46.I2)$$

$$\frac{dx}{d\xi} = x + \varphi'(p)$$

$$y = px + \varphi(p)$$

Первое уравнение дает

$$p = const \qquad (46.I3)$$

Это и есть "пропавшее" семейство решений. полученные решения оказываются семейством прямых,

$$y = cx + \varphi(c) \qquad (46.I4)$$

причем параметризация на каждой прямой семейства задается уравнением для X. Его решение

$$x = c_1 e^{\xi} - \varphi'(c) \qquad (46.I5)$$

не имеет существенного значения.

Весьма поучительная причина, по которой "исчезает" семейство прямых при интегрировании уравнения Клеро методом Лагранжа. Нельзя делить на нуль !Все дело именно в этом.

На решениях уравнения Клеро имеет место равенство

$$\frac{dp}{d\xi} = 0$$

а метод Лагранжа возникает при делении уравнения (6) на величину $\left(\frac{dp}{d\xi}\right)$. Эта операция законна в общем случае, когда $\varphi(p) \neq p$, и отказывает как раз для уравнения Клеро, когда $\frac{dp}{d\xi}$ оказывается равным нулю.

ГЛАВА УШ. ОКРЕСТНОСТЬ ОСОБОЙ ТОЧКИ. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЯДЫ.

§ 48. РЕГУЛЯРНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА. ГЛАВНЫЙ ЧЛЕН РЕШЕНИЯ.

Главная причина появления особенностей в уравнении Лагранжа – неединственность корней и слияние их при решении неявного уравнения

$$f\left(x, t, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \qquad (48.1)$$

относительно производной. Наглядно говоря – это особенность типа "нельзя извлекать корень из отрицательного числа".

Но существует и другая причина появления ососбенностей – " нельзя делить на нуль". Может случиться, что корень единственный, но коэффициент при $\frac{dx}{dt}$ обращается в нуль. В окретсности такой точки решение может иметь сложную особенность. Возможные типы таких точек видны на примере линейной системы

$$a(t)\frac{d\vec{x}}{dt} + b(t)\vec{x} + \vec{c}(t) = 0 \qquad (48.2)$$

с переменными коэффициентами. Если матрица $a(t)$ вырождается в некоторой точке, которую мы, конечно, выбираем за начало отсчета времени, то из этого уравнения нельзя найти $\frac{dx}{dt}$ в этой особой точке.

Основные черты явлений, возникающих в такой ситуации можно изучать не еще более частном примере системы

$$t\frac{dx}{dt} = A(t)x \qquad (48.3)$$

Матрица $A(t)$ в правой части разлагается в ряд по целым степеням t :

$$A(t) = A_0 + tA_1 + t^2A_2 + \dots + t^nA_n + \dots \qquad (48.4)$$

Начнем изучение с простейшего случая, когда матрица $A(t)$ постоянна и разложение состоит из одного главного члена

$$A(t) = A_0 \tag{48.5}$$

Л.Эйлер изучал аналогичную задачу для одного уравнения высшей степени

$$t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} t \frac{dx}{dt} + a_n x = 0, \tag{48.6}$$

которое называется сейчас "уравнением Эйлера", и предложил замену независимого переменного,

$$s = \ln t \tag{48.7}$$

приводящую уравнение (6) уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^n x}{ds^n} + b_1 \frac{d^{n-1} x}{ds^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{dx}{ds} + b_n x = 0 \tag{48.8}$$

Задача. Вычислить коэффициенты $b_1, b_2 \cdots b_n$ по коэффициентам $a_1,$ a_n Возможный путь–свести уравнение к системе первого порядка.

Подстановка Эйлера упрощает интегрирование системы

$$t \frac{dx}{dt} = A_0 x \tag{48.9}$$

так как эта система приводится к системе с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{ds} = A_0 x \tag{48.10}$$

Из этого замечания вытекает прямой способ решения системы (9). Будем искать частное решение в виде

$$x = t^\lambda x_0 \tag{48.11}$$

Подставляя это выражение в уравнение (9) традиционным рассуждением получаем (секулярное) вековое уравнение для показателя λ

$$\det |A_0 - \lambda E| = 0, \qquad (48.12)$$

и векторное уравнение для собственного направления x_0

$$(A_0 - \lambda E)x_0 = 0 \qquad (48.13)$$

Эти простые соображения дают возможность определить характер особенности при $t=0$. Если собственное число действительно, то решение может стремиться к нулю при $t \to 0$

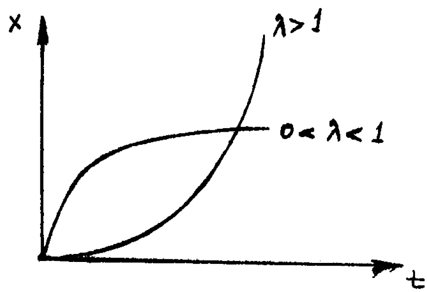


Рис. I. Поведение решения вблизи особой точки.
Случай положительных собственных чисел.

Этот случай осуществляется при положительных собственных числах. Если собственное число отрицательно, то решение обращается в бесконечность при $t \to 0$.

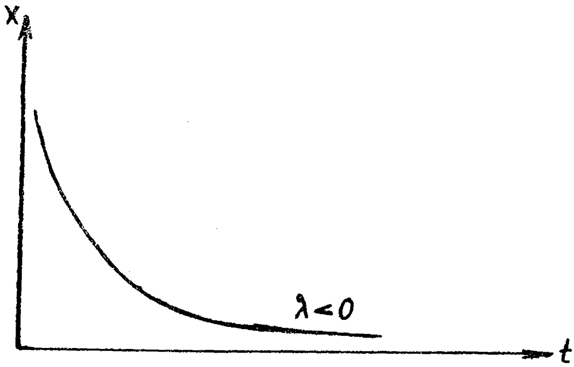


Рис. 2. Собственное число отрицательно. Решение имеет полюс (дробного порядка) в особой точке.

Еще интереснее поведение решений, соответствующих комплексным собственным числам. Решение имеет колебательный характер. Поведение огибающей ("амплитуды") определяется действительной частью собственного числа. Решение имеет бесконечное число максимумов и минимумов на любом сколь угодно малом отрезке, содержащем особую точку.

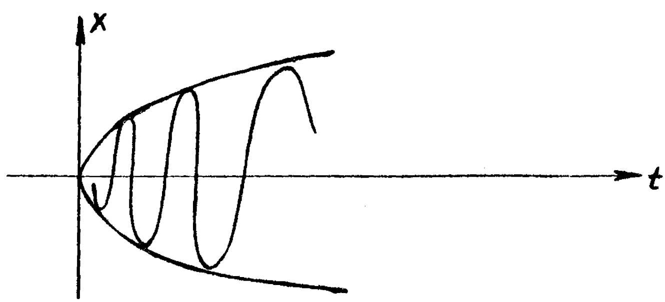


Рис. 3. Собственное число комплексно. Действительная часть положительна. Решение имеет бесконечное число нулей.

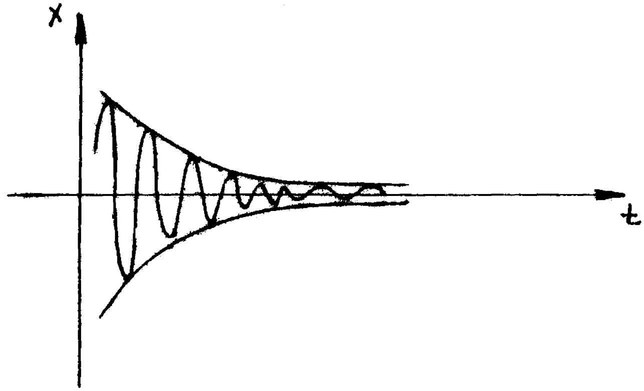


Рис. 4. Колебания нарастающей "амплитуды". Отрицательная действительная часть собственного числа.

§ 49. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РЯД ДЛЯ РЕШЕНИЯ.

Прием Эйлера позволяет выяснить до конца структуру решения в случае постоянной матрицы $A(t)$. Однако необходима существенно иная идея для изучения переменной матрицы $A(t)$. Этой идеей является идея асимптотического разложения.

Будем искать решение в виде бесконечного ряда

$$x(t) = t^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} t^{k} x_k \tag{49.1}$$

Будем называть такой ряд асимптотическим решением, если при подстановке его в уравнение

$$t\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{49.2}$$

коэффициенты при одинаковых степенях t одинаковы в обеих частях равенства.

Асимптотический ряд отличается от степенного, во-первых, общим множителем t^{λ}, а во-вторых, тем, что не требуется сходимости этого ряда. Имея в виду это последнее обстоятельство, такие ряды часто называют формальными решениями.

Покажем, что уравнение (2) всегда имеет формальное решение вида (I).

Так как $A(t)$ разлагается в ряд (для наших целей достаточно, чтобы этот ряд был только асимптотическим)

$$A(t)=\sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} A_{\ell}\,, \tag{49.3}$$

то правая часть представима в виде двойной суммы:

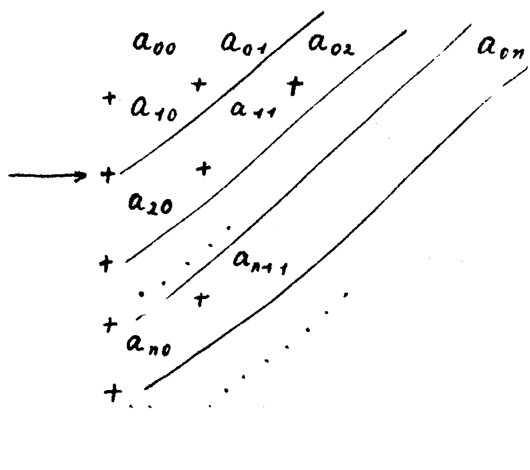
$$A(t)x = t^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} t^{k} A_{\ell} x_{k} \tag{49.4}$$

Собирая члены с одинаковыми степенями t, получим следующую сумму

$$A(t)x = t^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} t^{n}\sum_{k=0}^{k=n} A_{n-k} x_{k} \tag{49.5}$$

Наглядно изменение порядка суммирования можно изобразить следующей схемой:

$$\begin{aligned}&[a_{00}+a_{01}+a_{02}+\cdots]\\ +&[a_{10}+a_{11}+a_{12}+\cdots]\\ +&[\ \cdots\\ &\cdots\\ +&[a_{n0}+a_{n1}+a_{n2}+\cdots]\end{aligned}$$



Вычислим производную формальным почленным дифференцированием

$$t = \frac{dx}{dt} = t^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) t^{n} x_{n} \qquad (49.6)$$

Если теперь приравнять коэффициенты при одинаковых степенях t,

$$(n+\lambda) x_n = \sum_{k=0}^{k=n} A_{n-k} x_k \qquad (49.7)$$

то мы получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, формально эквивалентную одному дифференциальному уравнению.

Полученная система имеет весьма специальное, треугольное строение. Это значит, что в уравнении с номером k входят только коэффициенты с номером k, не превосходящим n. Это замечательное обстоятельство позволяет последовательно определить один коэффициент за другим.

Перепишем систему в более удобном виде, перенеся член в левую часть равенства

$$[(n+\lambda)E - A_0] x_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} A_{n-k} x_k \qquad (49.8)$$

Выпишем для наглядности несколько первых уравнений этой бесконечной системы

$n=0$ $$(\lambda E - A_0) x_0 = 0 \qquad (49.9)$$

$n=1$ $$[(\lambda+1)E - A_0] x_1 = A_1 x_0 \qquad (49.10)$$

$n=2$ $$[(\lambda+2)E - A_0] x_2 = A_2 x_0 + A_1 x_1 \qquad (49.11)$$

. . . .

Первое из полученных уравнений существенно отличается от всех остальных. Для того, чтобы оно имело решение, отличное от нуля, необходимо, чтобы λ было собственным числом матрицы A_0

$$\det(\lambda E - A_0) = 0 \qquad (49.12)$$

Все остальные уравнения однотипны и для того, чтобы они имели решения, достаточно, чтобы числа $\lambda+1, \lambda+2, \ldots \lambda+n$, наоборот, не были собственными числами матрицы A_0.

В соответствии с принципом общего положения, мы предполагаем, что матрица A_0 устроена именно так.

Нетрудно сообразить, что удобно это требование сформулировать следующим образом.

РАЗНОСТЬ ЛЮБЫХ ДВУХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ МАТРИЦЫ A_0

$$\lambda' - \lambda'' \neq \text{ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ} \qquad (49.13)$$

НЕ ЕСТЬ ЦЕЛОЕ ЧИСЛО.

Если условие (13) выполнено, то коэффициенты строятся по индукции:

$$x_n = -[A_0 - (\lambda+n)E]^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-k} x_k \qquad (49.14)$$

Полученная формула полностью решает задачу построения формального решения. Особенно следует подчеркнуть, что главный член полученного решения полной системы

$$x(t) \sim t^{\Lambda} x_0 \qquad (49.15)$$

совпадает с решением укороченной системы

$$t\frac{dx}{dt} = A_0 x \qquad (49.16)$$

в которой оставлен один главный член.

При некоторых предположениях можно доказать сходимость полученного асимптатического ряда, однако это выходит за рамки курса.

§ 50. УРАВНЕНИЕ БЕССЕЛЯ И АНАЛОГИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ.

Построение асимптотического ряда полностью решает вопрос для некоторых уравнений второго порядка.

Разберем более подробно уравнение вида:

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+at\frac{dx}{dt}+(b+ct^2)x=0 \qquad (50.1)$$

В полной аналогии с изложенным выше, ищем решение в виде ряда

$$x(t)=t^\lambda\sum_0^\infty t^n x_n \qquad (50.2)$$

Почленным дифференцированием находим, что

$$t\frac{dx}{dt}=t^\lambda\sum_0^\infty (n+\lambda)t^n x_n, \qquad (50.3)$$

а также что

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}=t^\lambda\sum_0^\infty (n+\lambda)(n+\lambda-1)t^n x_n \qquad (50.4)$$

Подставляя найденные выражения в уравнение (I) получаем, сокращая на t^λ,

$$\sum_0^\infty [(n+\lambda)(n+\lambda-1)+a(n+\lambda)+b]t^n x_n+\sum_0^\infty c\,t^{n+2}x_n=0 \qquad (50.5)$$

Первые два уравнения $(n=0$ и $n=1)$ получатся нестационарными из-за отсутствия слагаемых во второй сумме

$$[\lambda(\lambda-1)+a\lambda+b)]x_0=0 \qquad (50.6)$$

$$[(\lambda+1)\lambda+a(\lambda+1)+b]x_1=0 \qquad (50.7)$$

Начиная с $n=2$ возникает общая рекуррентная формула

$$x_n = -\frac{c}{(n+\lambda)(n+\lambda-1)+a(n+\lambda)+b}\,x_{n-1} \qquad (50.8)$$

В соответствии с принципом общего положения мы считаем, что собственное число λ является корнем только уравнения с $n=0$

$$\lambda(\lambda-1)+a\lambda+b=0 \qquad (50.9)$$

Все остальные знаменатели, в том числе и коэффициент при x_1 в уравнении (7), отличны от нуля.

Отсюды вытекает сразу две вещи.

Во-первых, x_1, а следовательно, и все остальные нечетные коэффициенты равны нулю

$$x_1=0,\quad x_3=0,\quad x_5=0,\ \ldots \qquad (50.10)$$

Во-вторых, знаменатель формулы (8) можно упростить, вычитая из него выражение $\lambda(\lambda-1)+a\lambda+b$, равное нулю.

Итак, имеем

$$x_{2n} = -\frac{c}{2n\,(2n+2\lambda+a-1)}\,x_{2n-2}\,. \qquad (50.11)$$

Полученная формула позволяет на основании признака Д'Аламбера доказать сходимость полученного степенного ряда.

Обратим внимание на любопытный частный случай, когда

$$2\lambda+a=0 \qquad (50.12)$$

В этом случае

$$x_{2n} = \frac{(-c)^n}{(2n)!}\,x_0 \qquad (50.13)$$

Следовательно,

$$x(t) = t^{\lambda}\cos\left(t\sqrt{c}\right)x_0 \qquad (50.14)$$

и решение в этом случае выражается через элементарные функции.

Если $c > 0$, то решение есть просто косинус, умноженный на степень t, если же c отрицательно, то извлечение корня приводит к появлению мнимой единицы, и косинус становится гиперболическим.

Это обстоятельство, впрочем, проще усмотреть непосредственно из формулы (I3).

МФТИ Л-71974 ЗАК.121 ТИР.1000экз. ЦЕНА о-20коп.

ЦЕНА 20 коп